F 2667

Nr. 1 Vol. 16

L: 037574

BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIŞOARA

SERIA

MATEMATICA — FIZICA — MECANICA TEORETICĂ ŞI APLICATĂ

Tomul 16 (30) Fascicola 1

IANUARIE — IUNIE
1971

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1883

BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIŞOARA

SERIA
MATEMATICĂ – FIZICĂ – MECANICĂ TEORETICĂ
ŞI APLICATĂ

Tomul 16 (30) Fascicola 1

IANUARIE—IUNIE
1971

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. em. dr. ing. Gh. Silaș (redactor șef), prof. dr. doc. ing. *I. Anton* m.c. al Academiei R.S.R., prof. em. ing. *C. Avram* m.c. al Academiei R.S.R., prof. dr. ing. *M. Bornas*, prof. em. dr. ing. *M. Brașovan*, prof. dr. ing. *V. Cochci*, academician prof. dr. doc. *C. Drăgulescu*, prof. dr. *O. Em. Gheorghiu*, prof. em. ing. *V. Gheorghiu*, prof. dr. ing. *Gh. Savii*, prof. em. ing. *D. Mateescu*, prof. dr. ing. *I. Novac*.

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. dr. doc. ing. *I. Anton* m.c. al Academiei R.S.R. (redactor responsabil), prof. dr. ing. *Gh. Savii* (redactor responsabil adjunct), prof. dr. doc. ing. *A. Nanu* (redactor responsabil adjunct), prof. dr. ing. *N. Gheorghiu*, prof. dr. ing. *G. Creța*, prof. dr. ing. *I. Hajdu* (secretar de redacție), prof. dr. ing. *Vl. Popovici*, prof. dr. ing. *A. Șandru*, prof. dr. ing. *C. Ungureanu*.

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL INSTITUTULUI POLITEHNIC TIMIȘOARA

SERIA MATEMATICĂ-FIZICĂ-MECANICĂ TEORETICĂ ȘI APLICATĂ

Tom 16(30) Fasc. 1 Ianuarie-iunie 1971

SUMAR

T. BINZARU, Asupra continuității aplicațiilor multivoce 7

G. PALEA, Asupra unor ecuații diferențial-funcționale a lui D. Pompeiu, I. I. Stamate 13

I. P. POPESCU, Asupra spațiilor fibrate cu grup structural GA(n, R). (I) 23

M. BORNEAS, M. DAVID, I MIRON, Asupra unor formulări ale principiului acțiunii 33

AURICA MUNTEANU, C. MARCU, RADA BAEA, Cercetări experimentale și teoretice asupra variației cîmpului coercitiv la reducerea tensiunilor interne a aliajelor Fe—Ni 45

GH. SILAȘ, O nouă metodă de studiu a sistemelor vibropercutante liniare cu un grad de libertate și o cuplă percutantă 55

GH. SILAȘ, I. GROȘANU N. BOGOEVICI, Contribuții la studiul regimurilor staționare ale unui sistem mecanic cu excitație inerțială acționat de un motor electric 65

GH. SILAȘ, A. HEGEDÜS, Contribuții privind studiul mișcărilor periodice optime ale sistemelor vibropercutante cu un grad de libertate 79

DOINA BECHERESCU, Asupra mișcării cu salturi a unei particule pe o platformă vibrantă acționată de un generator de vibrații Mișcarea longitudinală 95

L. BRÎNDEU, Stabilitatea mișcărilor periodice ale unui sistem cu caracteristica biliniară 105

I. N. CONSTANTINESCU, Principiul celei mai mici constîngeri pentru sisteme materiale percutante 115

A. MUNTEANU, I. KREMMER, I. ARTZNER, R. BAEA, Unele aspecte cu privire la depunerea electrolitică a aliajului Ni—Fe 125

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ БЮЛЛЕТЕНЬ ТИМИШОРСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Серия математика-физика — теоретическая и прикладная механика

Том 16 (30) Выпуск I. Январь-июнь 1971 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Т. БЫНЗАРУ, О непрерывности многозначных отображений 7

Г. ПАЛЯ, О дифференциально-функциональных уравнениях обобщающих дифференциально-функциональное уравнение Д. Помпею — И. И. Стамате 13

И. ПОПЕСКУ, О расслоенных пространствах со структурной группой GA (n, R.). (I.) 23

М. БОРНЕАС, М. ДАВИД, И. МИРОН, К формулировке принципа воздействия 33

А. МУНТЕАНУ, К. МАРКУ, Р. БАЕА, Опытные теоретические исследования изменения коэрцитивного поля при уменьшении внутренних напряжений у ферроникелевых сплавов 45

Г. СИЛАШ, Новый метод исследования виброударных линейных систем с одной степенью свободы и ударной связью 55

Г. ИЛАШ, И. ГРОШАНУ, Н. БОГОЕВИЧ, К исследованию стационарных режимов механической системы с инерциальным возбуждением 65

Г. СИЛАШ, А. ХЕГЕДУШ, К исследованию периодических оптимальных движений виброударных систем с одной степенью сбододы 79

ДОЙНА БЕКЕРЕСКУ, К движению частицы с подпригиванием на площадке возбуждаемой виброгенератором. Продольное движение 95

Л. БРЫНДЕУ, Устойчивость периодических движений системы с билинейной характеристикой 105

И. КОНСТАНТИНЕСКУ, Принцып наименьшего сжатия для материальных ударных систем 115

А. МУНТЯНУ, И. КРЕМЕР, И. АРЦНЕР, Р. БАЯ, Некоторые соображение об электролитической осаждений сплава 125

BULLETIN SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
DE L'INSTITUT POLYTECHNIQUE DE TIMIŞOARA

SERIE MATHÉMATIQUE-PHYSIQUE-MECANIQUE THEORIQUE ET APPLIQUE

ome 16(30) Fasc. 1 Janvier-Juin 1971

SOMMAIRE

T. BRÎNZARU, Über die Konstinuität den Mehrdeutigkeitsfunktionen 7

G. PALEA, Sur quelques équations differentiel-fonctionelles qui généralisent l'équation differential-fronctionelle de D. Pompeiu-I. I. Stamate 13

I. P. POPESCU, Sur les espaces fibrés à groupe structurel GA(n, R). I. 23

M. BORNEAS, M. DAVID, I. MIRON, On Some Formulations of the Action Principle 33

AURICA MUNTEANU, C. MARCU, R. BAEA, Experimentalle und theoretische Untersuchungen über die Änderung der Koerzitivkraft bei verminderung der inneren Spannungen in Eisen-Nickel-Legierungen 45

GH. SILAŞ, Eine neues Verfahren zum Studium linearer stosschwingsysteme mit einem Freiheitsgrad und einem Stosspaar 55

GH. SILAŞ, I. GROŞANU, N. BOGOEVICI, Beitrag zum Studium der Stationären Bewegungszustände eines unwuchterregten mechanischen Verbandes 65

GH. SILAŞ, A. HEGEDÜS, Beitrag zum Studium der optimalen periodischen Bewegungen von Stossschwingsystemen mit einem Freiheitsgrad 79

DOINA BECHERESCU, Über die Bewegungen mit Sprüngen eines materiallen Punktes auf einer durch einem Schwingungserreger betriebenen Platform. Längsbewegung 95

L. BRÎNDEU, Die Stabilität der periodischen Bewegungen eines Verbandes mit biliniarer Kennlinie 105

I. N. CONSTANTINESCU, The Principle of the Least Action for the Matherial Systems with Impacts 115

A. MUNTEANU, Einige Aspekte bezuglich elektrolitisch niedergeschlagenen Ni—Fe Schichten 125

ASUPRA CONTINUITĂȚII APLICAȚIILOR MULTIVOCE.

DE

T. BANZARU

1. Introducere. Notații.

În [1] sînt definite semi-continuitățile unei aplicații multivoce în cazul general al spațiilor topologice, iar în [3] și [5] sînt date condiții echivalente pentru continuitatea aplicațiilor multivoce.

În prezenta lucrare ne propunem să urmărim dacă toate condițiile echivalente pentru exprimarea continuității unei funcții au corespondent la aplicațiile multivoce, iar în partea a doua a lucrării introducem două topologii generate de o aplicație multivocă și studiem unele proprietăți de conexiune a acestor spații topologice.

Vom folosi în continuare notațiile :

$F : X \to Y$, pentru o aplicație multivocă de la X în Y și
$F : X \to Y$, pentru o aplicație multivocă pe.
F^{-1} va fi notația pentru inversa superioară a aplicației F iar
F_{-1} pentru inversa inferioară a aplicației F.

Deoarece există mai multe terminologii diferite în teoria aplicațiilor multivoce vom defini în continuare și terminologia folosită, urmărind ca aceasta să fie cît mai natural posibilă.

Definiția 1.1.

Pentru orice mulțimi X și Y, $F : X \to Y$ este o aplicație multivocă dacă pentru fiecare $x \in X$, $F(x)$ este o submulțime a lui Y (chiar și mulțimea vidă $\emptyset$). Vom păstra în cele ce urmează termenul de funcție doar pentru o aplicație univocă.

Definiția 1.2.

Fie $F : X \to Y$ o aplicație multivocă. Vom spune atunci că :

a) F este o aplicație semi-continuă superior (s.c.s.) dacă $F^{-1}(U)$ este deschisă pentru orice mulțime deschisă $U \subset Y$.
b) F este o aplicație semi-continuă inferior (s.c.i) dacă $F_{-1}(V)$ este deschisă pentru orice mulțime deschisă $V \subset Y$.
c) F este aplicație multivocă continuă dacă F este s.c.s. și s.c.i.
d) F este închisă (deschisă) dacă $F(B)$ este închisă (deschisă) pentru orice mulțime B închisă (deschisă) $B \subset Y$.

2. Studiul continuității aplicațiilor multivoce.

Se pot da condiții echivalente pentru continuitatea aplicațiilor multivoce, asemănătoare celor de la funcții, care însă sînt legate de cele două inverse definite mai sus. Astfel condiția cu mulțimi închise se poate formula :

Teorema 2.1.

Condiția necesară și suficientă ca o aplicație multivocă $F : (X,\mathfrak{T}) \to (Y,\mathfrak{U})$, unde $\mathfrak{T}$ și $\mathfrak{U}$ sînt topologiile celor două spații, să fie continuă pe X este ca $F^{-1}(B)$ și $F_{-1}(B)$ să fie submulțimi închise în X, oricare ar fi submulțimea închisă $B \subset Y$.

În adevăr datorită relațiilor :

$$F^{-1}(-B) = -F_{-1}(B) \text{ și} \tag{1.1}$$

$$F_{-1}(-B) = -F^{-1}(B). \tag{1.2}$$

unde prin „—" am notat complementara acelei mulțimi, rezultă evident afirmația teoremei.

Definiția 2.1.

Dacă A este o mulțime într-un spațiu topologic $(X, \mathfrak{T})$, vom spune că V este o vecinătate care intersectează mulțimea A, dacă există o mulțime deschisă $G \subset X$ astfel ca $G \subset V$ și $G \cap A \neq \emptyset$.

Definiția 2.2

Dacă A este o mulțime într-un spațiu topologic $(X, \mathfrak{T})$, vom spune că V este o vecinătate a mulțimii A dacă există o mulțime deschisă $G \subset X$ astfel ca $A \subset G \subset V$.

Cu aceste definiții conform lui [5] putem enunța :

Teorema 2.2

Condiția necesară și suficientă ca o aplicație multivocă $F : (X\mathfrak{T}) \to (Y, \mathfrak{U})$ să fie :

a) s.c.i pe X este ca pentru orice $x \in X$ și orice vecinătate $V_{F(x)}$ care intersectează pe $F(x)$ să avem $F_{-1}(V_{F(x)}) \in \mathfrak{V}_x$, unde $\mathfrak{V}_x$ este sistemul tuturor vecinătăților punctului x.

b) s.c.s. pe X este ca pentru orice x și orice vecinătate $V_{F(x)}$ a lui $F(x)$ să avem $F^{-1}(V_{F(x)}) \in \mathfrak{V}_x$.

Această teoremă este asemănătoare cu teorema pentru funcții legată de continuitatea în fiecare punct al mulțimii.

Urmînd aceeași cale, menționăm însă că nu pot fi formulate condiții de continuitate a aplicațiilor multivoce cu ajutorul elementelor unei subbaze a topologiei pe Y, cum se știe că există pentru funcții. Aceasta se datorește faptului că pentru aplicații multivoce avem următoarele relații :

$$F_{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} F_{-1}U_i \tag{2.1}$$

$$F_{-1}\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} F_{-1}U_i \tag{2.2}$$

$$F^{-1}(\bigcup_{i\in I} U_i)\supset \bigcup_{i\in I} F^{-1}U_i \tag{2.3}$$

$$F^{-1}(\bigcap_{i\in I} U_i)=\bigcap_{i\in I} F^{-1}U_i \tag{2.4}$$

care pot fi ușor verificate.

Se poate da însă o teoremă legată de închiderea mulțimilor, dar exprimarea este adevărată doar pentru s.c.i. Astfel avem :

Teorema 2.3.

Condiția necesară și suficientă ca o aplicație multivocă $F : (X, \mathcal{T})\to(Y, \mathcal{U})$ să fie s.c.i. este ca pentru orice $A\subset X$ să avem $F(\bar{A})\subset\overline{F(A)}$, unde $\bar{A}$ și $\overline{F(A)}$ sînt închiderile celor două mulțimi în topologiile respective.

Demonstrație.

Dacă F este s.c.i. și A este o mulțime arbitrară din X, punînd $B=F(A)$ atunci : $\bar{B}=\bigcap \{C : C\supset B,\ -C\in\mathcal{U}\}$.
Rezultă din (2.4) că
$F^{-1}(\bar{B})=\bigcap \{F^{-1}C : C\supset B,\ -C\in\mathcal{U}\}$.
Dar orice $F^{-1}C$ este o mulțime închisă conform teoremei 2.1. și conține pe $F^{-1}B$ care conține pe A, deoarece $F^{-1}B=F^{-1}FA\supset A$. Avem astfel $F^{-1}\bar{B}\supset\bar{A}$. Aplicînd F în ambii membri obținem :

$F(\bar{A})\subset(F^{-1})(B)\subset\bar{B}=\overline{F(A)}$.

Reciproc, dacă $A\subset X$ implică $F(\bar{A})\subset\overline{F(A)}$, fie C o mulțime închisă din $(Y, \mathcal{U})$ și notăm cu $D=F^{-1}C$. Atunci $F(D)\subset\overline{F(D)}\subset\bar{C}=C$. Deoarece D este inversa superioară a lui C prin F rezultă :

$F^{-1}F(\bar{D})\subset F^{-1}(C)=D$.

Dar $F^{-1}F(\bar{D})\supset\bar{D}$. Deci $\bar{D}\subset D$ și prin urmare $D=\bar{D}$ deci D este închisă. Așa dar inversa superioară a oricărei mulțimi închise din Y este închisă în X și conform teoremei 2.1. F este s.c.i.

Consecință

Dacă $F : (X,\mathcal{T})\to\!\!\to(Y,\mathcal{U})$ este o aplicație multivocă s.c.i. și dacă $A\subset X$ este peste tot densă în $(X,\mathcal{T})$, atunci $F(A)$ este peste tot densă în $(Y,\mathcal{U})$.

Demonstrație.

A este peste tot densă în $(X,\mathcal{T})$ dacă și numai dacă $\bar{A}=X$. Dar $\overline{F(A)}\supset F(\bar{A})=$ $=F(X)=Y$, datorită semi-continuității și faptului că aplicația este pe. Deoarece $\overline{F(A)}\supset Y$ rezultă că $F(A)$ este peste tot densă în $(Y,\mathcal{U})$.

3. **Topologii induse de o aplicație multivocă.**

Fie $F : X\to Y$.

Teorema 3.1.

Familia $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{L}(Y)$, unde $\mathfrak{L}(Y)$ este mulțimea părților lui Y, definită de proprietatea:

$\mathfrak{U}=\{U : U \subset Y,\ F^{-1}U=F_{-1}U\}$

este o topologie pe Y indusă de aplicația F.

Demonstrație.

Se știe din [1] că familia $\mathfrak{U}$ este o latice complementară. Folosind atunci relațiile (2.1), (2.2), (2.3), și (2.4) rezultă că $\mathfrak{U}$ este o topologie pe Y.

Definiția 3.1.

Numim totpologia definită de teorema 3.1. , topologia pură pe Y relativ la aplicația F.

Teorema 3.2.

Fie $F : X \to Y$, iar $\mathfrak{U}$ topologia pură pe Y relativ la aplicația F. Atunci spațiul topologic $(Y, \mathfrak{U})$ este un spațiu local conex [2].

Demonstrație.

Familia $\mathfrak{U}$ fiind o latice complementară, orice mulțime deschisă din acest spațiu este și închisă. Atunci componenta unei mulțimi deschise U, $C(U,x)$ este închisă în $(U,\mathfrak{F}_U)$. Dar U este și închisă în $(Y,\mathfrak{U})$ și deci orice mulțime închisă în $(U,\mathfrak{F}_U)$ este închisă și în $(Y,\mathfrak{U})$. De aici rezultă atunci că $C(U,x)$ va fi o mulțime deschisă în $(Y,\mathfrak{U})$ și prin urmare spațiul $(Y,\mathfrak{U})$ este un spațiu local conex.

Teorema 3.3.

Dacă $F : X \to Y$ este o aplicație multivocă atunci familia: $\mathfrak{S}=\{S : S \subset X,\ F_{-1}FS=S\}$ este o topologie pe X.
Demonstrația este analoagă ca și la teorema 3.1.

Definiția 3.2.

Numim topologia definită de teorema 3.3. , topologia stabilă pe X relativă la aplicația multivocă F.

Teorema 3.4.

Dacă $F : X \to Y$, iar $\mathfrak{S}$ este toplogia stabilă pe X relativă la F, atunci spațiul topologic $(X, \mathfrak{S})$ este un spațiu local conex.
Demonstrația este analoagă cu cea din teorema 3.2.
Legate de cele două topologii definite mai sus se demonstrează:

Teorema 3.5.

Fie $F : X \to (Y, \mathfrak{U})$ unde $\mathfrak{U}$ este topologia pură relativ la F. Atunci cea mai puțin fină topologie pe X pentru care aplicația F este s.c.i. este topologia stabilă relativ la F.

Demonstrație.

Fie în adevăr $\mathcal{S}$ topologia formată din acele mulțimi ale lui X care sînt inversele inferioare ale mulțimilor deschise din Y. Atunci acestea sînt submulțimi stabile ale lui X, deoarece dacă notăm o astel de mulțime prin S, atunci $S=F_{-1}U$, $U\in\mathcal{U}$ și avem:

$F_{-1}FS=F_{-1}F(F_{-1}U)$ iar
$S\subset F^{-1}FS\subset F_{-1}FS=F_{-1}F(F_{-1}U)=F_{-1}F(F^{-1}U)\subset F_{-1}U=S$. Deci rezultă $F_{-1}FS=S$.

Fie acum pe mulțimea X, topologia $\mathcal{S}'\subset\mathcal{S}$ pentru care aplicația F este s.c.i. Atunci inversa inferioară F_{-1} a oricărei mulțimi deschise din $\mathcal{U}$ trebuie să aparțină lui $\mathcal{S}'$. Dar cum aceste imagini ne dau mulțimi stabile ale lui X, rezultă $\mathcal{S}'\supset\mathcal{S}$ ceea ce ne conduce la $\mathcal{S}=\mathcal{S}'$ și cu aceasta demonstrată ultima parte a teoremei.

Remarcăm că în teorema de mai sus putem înlocui condiția s.c.i. prin s.c.s. și teorema rămîne valabilă. Analog se demonstrează și

Teorema 3.6.

Dacă $F:(X\mathcal{S})\to Y$ unde $\mathcal{S}$ este topologia stabilă relativ la F, atunci cea mai fină topologie pe Y pentru care F este s.c.i. este topologia pură relativ la F.

BIBLIOGRAFIE

[1] C. Berge, Espaces topologiques, functions multivoques. Dunod, Paris 1959.
[2] W. J. Thron, Topological Structures, 1966.
[3] E. Michael, Topologies on spaces of subsets. Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951) pp. 152—182.
[4] E. Michael, A theorem on semi-continuons set-volued functions. Duke Math. Journal 26, 647 (1959).
[5] Carles J. R. Borges, A study of multivalued functions. Pacific Journal of mathematics vol. 23, Nr. 3, 1967.
[6] Arrigo Cellina, Aproximation of set valued functions and fixed points theorems. Annali di Matematica pura ed applicata. 82 (1969) pp. 17—24.

О НЕПРЕРЫВНОСТИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(РЕЗЮМЕ)

В данной работе доказываются теоремы о непрерывности многозначных отображений и исследуются два типа топологии на множества а также изучпются связные свойства этих топологических пространств.

ÜBER DIE KONTINUITÄT DER MEHRDEUTIGKEITSFUNKTIONEN

Im Beitrag werden Lehrsätze über die Kontinuität der Mehrdeutigkeitsfunktionen bewiesen, zwei Arten von Topologien auf Mengen aufgebaut durch eine mehrdeutige Anwendung, wie auch die zusammenhängenden Eigenschaften dieser topologischen Räume werden studiert.

ASUPRA UNOR ECUAȚII DIFERENȚIAL-FUNCȚIONALE CARE GENERALIZEAZĂ ECUAȚIA DIFERENȚIAL-FUNCȚIONALĂ A LUI D. POMPEIU-I. STAMATE.

DE

G. PALEA

1. În 1946, D.Pompeiu [1] în legătură cu o propoziție analogă teoremei creșterilor finite, a dat ecuația diferențial-funcțională:

$$\frac{xf(y)-yf(x)}{x-y} = f(\xi)-\xi f'(\xi), \quad \xi=\xi(x,y) \tag{P}$$

iar în 1959, I.Stamate [2] a soluționat ecuația funcțional-diferențială:

$$\frac{xf(y)-yf(x)}{x-y} = f\left(\frac{x+y}{2}\right)-\frac{x+y}{2}f'\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{S}$$

În 1960, M.Ghermănescu [3,p.247-249] dă o altă metodă de soluționare a ecuației (S) iar doi ani mai tîrziu B.Choczewski și M.Kuczma [4] soluționează ecuația diferențial-funcțională:

$$\frac{xf(y)-yf(x)}{x-y} = F\left[\xi, f(\xi), f'(\xi), \ldots, f^{(n)}(\xi); g(\xi), g'(\xi), \ldots, g^{(m)}(\xi)\right] \tag{C—K}$$

unde $f(x)$ și $g(x)$ sînt funcții necunoscute iar $\xi=\xi(x,y)$ și $F(t,u_0,u_1,\ldots,u_n;\ v_0,v_1,\ldots,v_m)$ sînt funcții date.

A.Viciu [5] în 1967 dă mai multe generalizări a ecuației (S) a lui Stamate iar de curînd B.Crstici și N.Neamțu [6] au generalizat ecuația diferențial-funcțională (C-K), considerînd în membrul stîng expresia:

$$\frac{yz(z-y)f(x)+zx(x-z)f(y)+xy(y-x)f(z)}{yz(z-y)+zx(x-z)+xy(y-x)}$$

2. În acest paragraf considerăm ecuația:

$$\frac{x^p f(y)-y^m g(x)}{x^p-y^m} = f(\xi)-\frac{1}{m}\frac{df(\xi)}{d\ln|\xi|}, \tag{1}$$

unde $m\neq p\in N$, $x,y,\xi=\frac{x+y}{2}\in R$ și $f,g:R\to R$, sînt funcțiile necunoscute.

Aplicînd pentru soluționare oricare din metodele folosite de I.Stamate [2], M.Ghermănescu [3,p.247], B.Choczewski și M.Kuczma [4], ajungem la concluzia :

$$f(0)=g(0)=\frac{x^p f(y)-y^m g(x)}{x^p-y^m} \tag{2}$$

Deci :

$$f(y)=ay^m+f(0)\,; \qquad g(x)=ax^p+g(0) \tag{3}$$

Dacă integrăm ecuația diferențială :

$$f(0)=f(u)-\frac{1}{m}\frac{df(u)}{d\ln|u|}$$

obținem soluția generală de forma (3).

Dacă luăm $m=p$, atunci $f(x)\equiv g(x)$ și soluția este găsită de A.Viciu [5].

3. Fie următoarea generalizare a ecuației (S) :

$$\frac{x f^{(m)}(y)-y f^{(m)}(x)}{x-y}=f(\xi)-\frac{1}{p}\frac{df(\xi)}{d\ln|\xi|} \tag{4}$$

unde $m,p\in N$, $x,y,\xi=\frac{x+y}{2}\in R$, $f:R\to R$ este funcția necunoscută, iar $f^{(m)}$ reprezintă derivata de ordinul m a funcției f.

Dacă pentru soluționare aplicăm metoda lui M.Ghermănescu [3,p.247] sau metoda folosită de B.Choczewski și M.Kuczma [4], obținem :

$$\frac{x f^{(m)}(y)-y f^{(m)}(x)}{x-y}=<_{A\neq 0}^{0} \tag{5}$$

și :

$$f(u)-\frac{u}{p}f'(u)=<_{A\neq 0}^{0} \tag{6}$$

Deci putem să scriem soluția generală a ecuației [4] sub următoarea formă :

$$f(x)=ax^p,\ a\neq 0 \text{ și } p=1,2,3,\ldots,m-1,m+1,m\in N \tag{7}$$

$$f(x)=A\left(\frac{x^m}{m!}+1\right),\ A\neq 0 \text{ și } p=m\in N \tag{8}$$

$$f(x)=0,\ p,m\in N \tag{9}$$

4. Să considerăm acum ecuația diferențial-funcțională :

$$\frac{x^m f^{(\alpha)}(y)-y^p g^{(\gamma)}(x)}{x^m-y^p}=f(\xi)-\frac{1}{\lambda}\frac{df(\xi)}{d\ln|\xi|} \tag{10}$$

unde $x,y,\xi=\frac{x+y}{2}\in R, m,p,\lambda,\alpha,\gamma\in N$ iar $f,g:R\to R$ sînt funcții necunoscute.

Dacă facem $x=0$ și $y\neq 0$ iar apoi $y=0$ și $x\neq 0$ se obține că:

$$g^{(\gamma)}(0)=f^{(\alpha)}(0)=f(u)-\frac{u}{\lambda}f'(u),\ \text{cu}\ f(0)=f^{(\alpha)}(0)=g^{(\gamma)}(0) \tag{11}$$

Dacă integrăm această ecuație diferențială obținem:

$$f(u)=Cu^{\lambda}+f^{(\alpha)}(0) \tag{12}$$

unde C este o constantă arbitrară.

Deoarece din (10) și (11) urmează că:

$$x^m f^{(\alpha)}(y)-y^p g^{(\gamma)}(x)=f(0)\quad (x^m-y^p)$$

avem relațiile:

$$f^{(\alpha)}(y)=ay^p+f(0);\quad g^{(\gamma)}(x)=ax^m+f(0) \tag{13}$$

unde a este o constantă arbitrară.

I. Dacă $f(0)=f^{(\alpha)}(0)=g^{(\gamma)}(0)=0$, atunci din (12) și (13) obținem soluția ecuației diferențial-funcțională (10):

$$\begin{cases} f(x)\equiv 0 \\ g(x)=\sum_{0}^{\gamma-1} C_k x^k,\ \alpha,\gamma,\lambda,m,p\in N;\ C_k\in R \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} f(x)=Cx^{\lambda},\ \lambda=1,2,3,\ldots,\alpha-1,\alpha+p;\ \alpha,p\in N;\ C\in R \\ g(x)=bx^{m+\lambda}+\sum_{0}^{\gamma-1} C_k x^k, m,\gamma\in N;\ C_k,b\in R \end{cases} \tag{15}$$

II. Dacă $f(0)=f^{(\alpha)}(0)=g^{(\gamma)}(0)\neq 0$, soluția ecuației (10) este:

$$f(x)=f(0)\left(1+\frac{x^{\alpha}}{\alpha!}\right),\ \lambda=\alpha\in N;\quad \gamma,m,p\in N \tag{16}$$

$$g(x)=f(0)\frac{x^{\gamma}}{\gamma!}+bx^{m+\gamma}+\sum_{0}^{\gamma-1} C_k x^k,\ 0\neq f(0)\in R;\ C_k\in R$$

5. Să considerăm și ecuația diferențial-funcțională:

$$\frac{x^m f^{(\alpha)}(y)-y^p g^{(\gamma)}(x)}{x^m-y^p}=f(\xi)-\frac{df(\xi)}{d\ln\left|\frac{\xi^{\alpha}}{\alpha!}+\frac{\xi^{\alpha+p}}{(\alpha+p)!}\right|} \tag{17}$$

unde $x,y,\ \xi=\frac{x+y}{2}\in R, m,p,\alpha,\gamma\in N$ iar $f,g:R\to R$ sînt funcții necunoscute.

Procedînd analog, se găsește soluția generală:

$$\begin{cases} f(x)=A\left[1+\dfrac{x^{\alpha}}{\alpha!}+\dfrac{x^{\alpha+p}}{(\alpha+p)!}\right] & (a\cdot A\neq 0) \\ g(x)=A\dfrac{x^{\gamma}}{\gamma!}+bx^{m+\gamma}+\sum_{0}^{\gamma-1}C_k x^k & C_k\in R \end{cases} \tag{18}$$

6. Fie acum ecuația diferențial-funcțională:

$$\frac{x^m f^{(\alpha)}(y)-y^p g^{(\gamma)}(x)}{x^m-y^p}=f(\xi)-\frac{df(\xi)}{d\ln|\xi|}-\frac{1}{2}\frac{d^2 f(\xi)}{d^2\ln|\xi|}-\ldots-\frac{1}{\lambda}\frac{d^{\lambda}f(\xi)}{d^{\lambda}\ln|\xi|} \tag{19}$$

unde $x,y,\ \xi=\dfrac{x+y}{2}\in R, m,p,\alpha,\gamma,\lambda\in N$ iar $f,g:R\to R$ sînt funcțiile necunoscute.

Pentru $x=0,\ y\neq 0$ iar apoi pentru $y=0$ și $x\neq 0$ se obține ecuația diferențială:

$$g^{(\gamma)}(0)=f^{(\alpha)}(0)=f(u)-uf'(u)+\frac{1}{2!}u^2 f''(u)-\frac{1}{3!}u^3 f'''(u)+\ldots$$

$$+(-1)^{\lambda}\frac{1}{\lambda!}u^{\lambda}f^{(\lambda)}(u) \tag{20}$$

care este de tip Euler și care permite determinarea funcției $f(u)$.

I. Dacă $f(0)=g^{(\gamma)}(0)=f^{(\alpha)}(0)=0$, atunci $\alpha>\lambda$ și se obține soluția generală a ecuației diferențial-funcțională (19) astfel:

$$\begin{cases} f(x)=C_1x^{\lambda}+C_2x^{\lambda-1}+\ldots+C_{\lambda}x, C_1, C_2, \ldots, C_{\lambda} \text{ sînt constante arbitrare} \\ g(x)=\sum_{0}^{\gamma-1}B_k x^k \quad B_k\in R \end{cases} \tag{21}$$

II. Dacă $f(0)=f^{(\alpha)}(0)=g^{(\gamma)}(0)\neq 0$, atunci $\alpha=\lambda$ și soluția ecuației (19) este:

$$\begin{cases} f(x)=C_1x^{\alpha}+C_2x^{\alpha-1}+\ldots+C_{\alpha}x+f^{(\alpha)}(0), C_1,\ C_2\ \ldots\ C_k \text{ sînt constante arbitrare} \\ g(x)=ax^{\gamma}+\sum_{0}^{\gamma-1}C_k x^k, \quad a, C_k\in R \end{cases} \tag{22}$$

7. În continuare considerăm ecuația diferențial-funcțională:

$$\frac{x^{\alpha}F[y,f(y),f'(y),\ldots,f^{(p)}(y)]-y^{\beta}G[x,f(x),f'(x),\ldots,f^{(p)}(x)]}{x^{\alpha}-y^{\beta}}=$$

$$=F[\xi,f(\xi),f'(\xi),\ldots,f^{(p)}(\xi)]-\frac{dF[\xi,f(\xi),f'(\xi),\ldots,f^{(p)}(\xi)]}{d\ln|\xi|^{\beta}} \tag{23}$$

unde $x,y\ \xi=\dfrac{x+y}{2}\in R,\ \alpha,\beta,p,\in N$; $f:R\to R$ funcția necunoscută, iar $F,G: R^{p+2}\to R$ sînt funcții cunoscute.

Dacă procedăm analog, se obține ecuația diferențială:

$$G[0,f(0),f'(0),\ldots,f^{(p)}(0)]=F[0,f(0),f'(0),\ldots,f^{(p)}(0)]=$$
$$=F[u,f(u),f'(u),\ldots,f^{(p)}(u)]-\frac{dF[u,f(u),f'(u),\ldots,f^{(p)}(u)]}{d\ln|u|^{\beta}} \tag{24}$$

Soluționînd această ecuație diferențială de ordinul I se obține:

$$\begin{cases} F[x,f(x),f'(x),\ldots,f^{(p)}(x)]=Cx^{\beta}+F[0,f(0),f'(0),\ldots,f^{(p)}(0)] \\ G[x,f(x),f'(x),\ldots,f^{(p)}(x)]=Cx^{\alpha}+G[0,f(0),f'(0),\ldots,f^{(p)}(0)] \end{cases} \tag{25}$$

unde C este o constantă arbitrară.

Dacă sistemul de ecuații diferențiale (25) cu F și G funcții cunoscute admite o soluție comună, atunci aceasta va fi soluția și pentru ecuația diferențial-funcțională (23).

Deci, soluția acestei ecuații, dacă există, va fi o funcție φ, care va depinde de $p+2$ constante, adică;

$$f(x)=\varphi(x,C,A,C_1,C_2,\ldots,C_p) \tag{26}$$

unde $A=F[0,f(0),f'(0),\ldots,f^{(p)}(0)]=G[0,f(0),f'(0),\ldots,f^{(p)}(0)]$
iar $C,C_1,C_2,\ldots,C_p$ sînt constante arbitrare.

8. Să mai considerăm și ecuația diferențial-funcțională:

$$\frac{x^{\alpha}F[y,f^{(p)}(y),g^{(m)}(y),h^{(q)}(y)]-y^{\beta}G[x,f^{(p)}(x),g^{(m)}(x),h^{(q)}(x)]}{x^{\alpha}-y^{\beta}}=$$
$$=H[\xi,f^{(p)}(\xi),g^{(m)}(\xi),h^{(q)}(\xi)]-\frac{dH[\xi,f^{(p)}(\xi),g^{(m)}(\xi),h^{(q)}(\xi)]}{d\ln\left|1+\frac{\xi^s}{s!}\right|} \tag{27}$$

unde $x,y,\ \xi=\frac{x+y}{2}\in R,\alpha,\beta,p,m,q,s\in N$; $f,g,h:R\to R$ sînt funcții necunoscute iar $F,G,H:R^4\to R$ sînt funcții date.

Dacă se consideră întîi $x=0$, $y\neq 0$ iar apoi $x\neq 0$ și $y=0$ se obține ecuația diferențială:

$$G[0,f^{(p)}(0),g^{(m)}(0),h^{(q)}(0)]=F[0,f^{(p)}(0),g^{(m)}(0),h^{(q)}(0)]=H[u,f^{(p)}(u),g^{(m)}(u),h^{(q)}(u)]-$$
$$-\frac{dH[u,f^{(p)}(u),g^{(m)}(0),h^{(q)}(u)]}{d\ln\left|1+\frac{u^s}{s!}\right|} \tag{28}$$

Integrînd această ecuație diferențială și ținînd cont de membrul stîng al ecuației (27) se obține sistemul:

$$\begin{cases} F\left[x,f^{(p)}(x),g^{(m)}(x),h^{(q)}(x)\right]=ax^{\beta}+F\left[0,f^{(p)}(0),g^{(m)}(0),h^{(q)}(0)\right] \\ G\left[x,f^{(p)}(x),g^{(m)}(x),h^{(q)}(x)\right]=ax^{\alpha}+G\left[0,f^{(p)}(0),g^{(m)}(0),h^{(q)}(0)\right] \\ H\left[x,f^{(p)}(x),g^{(m)}(x),h^{(q)}(x)\right]=C\left(1+\frac{x^s}{s!}\right)+F\left[0,f^{(p)}(0),g^{(m)}(0),h^{(q)}(0)\right] \end{cases} \tag{29}$$

unde a și C sînt constante arbitrare. Dacă acest sistem de ecuații diferențiale este compatibil se determină din el: $f^{(p)}(x),g^{(m)}(x)$ și $h^{(q)}(x)$ de unde prin integrări succesive se deduc apoi, funcțiile: $f(x),g(x),h(x)$ care vor depinde de $p+2$, $m+2$ și respectiv $q+2$ constante. Astfel, soluția ecuației diferențial-funcțională (27) va fi de forma:

$$\begin{cases} f(x)=\varphi(x,y,A,C_1,C_2,\ldots,C_p) \\ g(x)=\psi(x,a,A,C_1,C_2,\ldots,C_m) \\ h(x)=\chi(x,a,A,C_1,C_2,\ldots,C_q) \end{cases} \tag{30}$$

unde $A=F\left[0,f^{(p)}(0),g^{(m)}(0),h^{(q)}(0)\right]=G\left[0,f^{(p)}(0),g^{(m)}(0),h^{(q)}(0)\right]$ iar $a,C_1,C_2,\ldots,C_p,C_m,C_q$ sînt constante arbitrare.

9. Considerăm și ecuația diferențial-funcțională:

$$\frac{x^2f(2y)-2xyf(x+y)+y^2f(2x)}{(x-y)^2}=f[x+yf(x)]-\frac{df[x+yf(x)]}{d\ln|x+yf(x)|} \tag{31}$$

unde $x,y\in R$ iar $f:R\to R$ este funcția necunoscută.

Considerînd de exemplu $y=0$ și $x\neq 0$ se ajunge la ecuația diferențială:

$$f(0)=f(x)-\frac{df(x)}{d\ln|x|}, \tag{32}$$

care integrată ne dă soluția generală a ecuației diferențial-funcțională (31):

$$f(x)=Cx+f(0) \tag{33}$$

unde C este o constantă arbitrară.

10. Dacă se consideră ecuația diferențial-funcțională:

$$\frac{xf[f[f(y)]]-yf[f[f(x)]]}{x-y}=f[x+yf^{f}[(x)]]-\frac{df[x+yf[f(x)]]}{d\ln|x+yf[f(x)]|} \tag{34}$$

unde $x,y\in R$ și $f:R\to R$ este funcția necunoscută și dacă facem de exemplu $y=0$ și $x\neq 0$ se va obține ecuația diferențială:

$$f[f[f(0)]]=f(x)-xf'(x) \tag{35}$$

soluție generală este:

$$f(x)=Cx+A \tag{36}$$

unde C este o constantă arbitrară iar $A=f[f[f(0)]]$

Pentru a obține soluția ecuației (34) trebuie ca:

$A=A(C^2+C+1)$ de unde urmează să considerăm următoarele cazuri:

a.) $A=0$ și deci soluția este:

$$f(x)=Cx, \text{ unde } C \text{ este o constantă arbitrară} \tag{37}$$

b). $A\neq 0$ și $C^2+C+1=1$ care ne conduce la:

I. Dacă $C=0$ soluția este:

$$f(x)=A \tag{38}$$

II. Dacă $C=-1$ soluția este:

$$f(x)=-x+A \tag{39}$$

11. Am mai considerat și următoarea ecuație diferențial-funcțională:

$$\frac{x^m\lambda(y)F^{(\alpha)}(y)-y^p\lambda(x)G^{(\beta)}(x)}{x^m-y^p}=F(\xi)-\frac{1}{\gamma}\xi F'(\xi) \tag{40}$$

unde $x,y,\xi=\frac{x+y}{2}\in R$, $m,p,\alpha,\beta,\gamma\in N$ și $F,G,\lambda: R\to R$ sînt funcții necunoscute.

Procedînd analog se va ajunge la ecuația diferențială:

$$\lambda(0)G^{(\beta)}(0)=\lambda(0)F^{(\alpha)}(0)=F(u)-\frac{1}{\gamma}uF'(u) \tag{41}$$

Am considerat aici cîteva cazuri:

I. $\lambda(0)=0$, $F^{(\alpha)}(0)=0$, $G^{(\beta)}(0)\neq 0$ cînd se obține soluția generală a ecuației diferențial-funcționale (40) sub forma:

$$\begin{aligned} F(x)&=Cx^\gamma \\ \lambda(x)&=\frac{ax^{p-\gamma+\alpha}}{C\gamma(\gamma-1)\ldots(\gamma-\alpha+1)} \\ G(x)&=bx^{m-p+\gamma-\alpha+\beta}+\sum_0^{\beta-1}C_kx^k \end{aligned} \tag{42}$$

unde $a,C,\ b,\ C_k$ sînt constante și cînd trebuiesc impuse condițiile:

$m\geqslant 1,\ p\geqslant 2,\ \alpha<\gamma$ iar $\beta\in N$

II. $\lambda(0)=0$, $F^{(\alpha)}(0)\neq 0$ $G^{(\beta)}(0)=0$, cînd este valabilă aceeași so cu condițiile:

$$m\geqslant 2,\quad p\geqslant 1,\quad \alpha=\gamma,\quad \beta\in N.$$

III. $\lambda(0)=0$, $F^{(\alpha)}(0)=0$, $G^{(\beta)}(0)=0$, cînd este valabilă tot soluția (42) cu condițiile:

$$m\geqslant 2,\quad p\geqslant 2,\quad \alpha<\gamma,\quad \beta\in N.$$

IV. $\lambda(0)=0$, $F^{(\alpha)}(0)\not\equiv 0$, $G^{(\beta)}(0)\neq 0$, cu aceeași soluție (42) și cu condițiile:

$$m\geqslant 1,\quad p\geqslant 1,\quad \alpha=\gamma,\quad \beta\in N.$$

V. $\lambda(0)\neq 0$, $F^{(\alpha)}(0)\not\equiv 0$, $G^{(\beta)}(0)\not\equiv 0$, cînd soluția ecuației diferențial-funcțională (40) va fi de forma:

$$\begin{cases} F(x)=Cx^{\alpha}+\lambda(0)\cdot F^{(\alpha)}(0) \\ \lambda(x)=\dfrac{ax^{p}+\lambda(0)F^{(\alpha)}(0)}{C\alpha!} \\ G^{(\beta)}(x)=\dfrac{ax^{m}+\lambda(0)\,G^{(\beta)}(0)}{ax^{p}+\lambda(0)G^{(\beta)}(0)}\cdot C\alpha! \end{cases} \tag{43}$$

unde a, C sînt constante arbitrare și $\alpha=\gamma$

VI. $\lambda(0)\not\equiv 0$, $F^{(\alpha)}(0)=0$, $G^{(\beta)}(0)=0$ cînd soluția ecuației diferențial-funcțională (40) este de forma (42) cu condițiile ca:

$$m\geqslant 1,\quad p\geqslant 1,\quad \alpha<\gamma,\quad \beta\in N.$$

12. În acest ultim paragraf am considerat ecuația diferențial-funcțională:

$$\frac{\varphi[\varphi(x)]f(y)-\varphi(y)g(x)}{\varphi[\varphi(x)]-\varphi(y)}=h(\xi)-\frac{dh(\xi)}{d\ln|\varphi[\varphi(\xi)]|} \tag{44}$$

unde x, y, $\xi=\dfrac{x+y}{2}\in R$, f,g,h, $\varphi:R\to R$ sînt funcțiile necunoscute iar $\varphi(0)=0$.

Făcînd și aici întîi $x=0$ și $y\neq 0$ iar apoi $x\neq 0$ și $y=0$ se va obține soluția generală a ecuației (44) sub forma:

$$\begin{aligned} h(x)&=C\varphi[\varphi[\varphi(x)]]+g(0) \\ f(x)&=a\varphi(x)+g(0) \\ g(x)&=a\varphi[\varphi(x)]+g(0) \end{aligned} \tag{45}$$

unde a și C sînt constante arbitrare.

a cărei so

BIBLIOGRAFIE

ompeiu, Sur une proposition analogue au théorème des accroissements finis, Mathematica, 22 (1946), 143—146.

[2] I. Stamate, Observații în legătură cu o ecuație funcțională, Lucr. șt. Institutul polit. Cluj, 1959, p. 101—106.

[3] M. Ghermănescu, Ecuații funcționale, București, 1960, p. 247—249.

[4] B. Choczewski, M. Kuczma, Sur certaines équations fonctionnelles considérées par I. Stamate, Mathematica 4 (27) (1962), p. 225—233.

[5] A. Viciu, În legătură cu o generalizare a unei ecuații funcționale a lui D. Pompeiu-I. Stamate, Buletinul șt. al I. P. Cluj, 1967, 10., p. 61—70.

[6] B. Crstici, N. Neamțu, Sur une équation fonctionnelle, Publications de la faculté d'électrotechnique de l'université á Belgrade, 274—301 (1969), p. 53—59.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ОБОБЩАЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ Д. ПОМПЕЮ-И. И. СТАМАТЕ.

(РЕЗЮМЕ)

В настоящей работе, начиная с 2-го до 12-го параграфа, отыскиваются решения разных дифференциально-функциональных уравнений, которые составились на основе структурального изменения как левого, так и правого членов дифференциально-функционального уравнения И. И. Стамате.

SUR QUELQUES EQUATIONS DIFFERENTIEL-FUNCTIONNELLES QUI GENERALISENT L'EQUATION DIFFERENTIEL-FONCTIONNELLE DE D. POMPEIU — I. I. STAMATE

(RESUMÉ)

Dans ce travail on cherche, en commençant par le 2-ième et jusqu'au 12-ième paragraphe, des solutions pour les différents équations differentiel-fonctionnelle qui ont été construites en modifiant du point de vue structural autant le membre gauche aussi que le membre droit de l'équations differentiel-fonctionnelle de I. I. Stamate.

ASUPRA SPAȚIILOR FIBRATE CU GRUP STRUCTURAL GA(n,$\mathfrak{R}$). (I).

DE

I. P. POPESCU

Prin *GA n*, $\mathfrak{R}$) înțelegem grupul afin de dimensiune n peste corpul realelor.

În § 1 al lucrării se face o prezentare a grupului *GA* (*n*, $\mathfrak{R}$) ca grup Lie, fără a se apela la acțiunea sa ca grup Lie de transformări pe o varietate diferențiabilă. Se pun în evidență cîmpurile stîng invariante, constantele de structură și reprezentarea sa adjunctă. Acest studiu s-a făcut cu scopul de a introduce în § 2 un anumit tip de spațiu fibrat principal ce se poate asocia în mod natural unei varietăți diferențiabile. Am stabilit apoi o teoremă de echivalență care arată că acest spațiu fibrat principal este echivalent în sensul lui *Steenrod* cu spațiul fibrat al reperelor afine asociat varietății diferențiale respective. În consecință sînt izomorfe în sensul spațiilor fibrate.

Ambele paragrafe constituie numai prima parte a lucrării, care va continua cu un studiu al conexiunilor infinitezimale în spațiul fibrat menționat.

§ 1. GRUPUL AFIN CA GRUP LIE

1. *Observații de natură algebrică.* Prin *grup afin de dimensiune n peste* $\mathfrak{R}$ vom înțelege un grup Lie *GA* (*n*, $\mathfrak{R}$), izomorf cu grupul matricilor nesingulare de ordinul $(n+1)$ și de forma:

$$a=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a^i & a^i_j\end{pmatrix},\ a^i,\ a^i_j \in R\ ;\ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots\ n. \tag{1}$$

Inversa unei matrici a, o vom nota $\tilde{a}$. Elementele sale vor fi date de relațiile:

$$a^i_t\,\tilde{a}^j_h=\delta^i_h,\quad \tilde{a}^i=-a^h\,\tilde{a}^i_h. \tag{2}$$

Grupul afin $GA(n,\ R)$ se descompune în produsul *semidirect* $GA(n,\ \mathfrak{R})=G_1\times G_2$ unde

$$G_1=\{a_1\ ;\ a_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a^i\delta^i_j & \end{pmatrix},\ G_2=\{a_2\ ;\ a_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & a^h_i\end{pmatrix}\ ;\ \det(a^h_j)\neq\emptyset\}. \tag{3}$$

G_1 şi G_2 sînt subgrupuri ale lui $GA(n, \mathcal{R})$ izomorfe respectiv cu $\mathcal{R}^n$ structurat ca grup aditiv şi $GL(n, \mathcal{R})$. Identificînd G_1 cu $\mathcal{R}^n$ şi G_2 cu $GL(n, \mathcal{R})$ avem definite epimorfismele proiecţie

$$p_1 : GA(n, \mathcal{R}) \to R^n, \quad p_2 : GA(n, \mathcal{R}) \to GL(n, \mathcal{R}), \tag{4}$$

date respectiv de $p_1(a) = (a^i)$, $p_2(a) = (a^i_j)$. De asemeni se pot defini monomorfismele:

$$j_1 : \mathcal{R}^n \to GA(n, \mathcal{R}), \quad j_2 : GL(n, \mathcal{R}) \to GA(n, \mathcal{R}), \tag{4'}$$

date respectiv de $j_1(a) = a_1 \in GA(n, \mathcal{R})$, $j_2(a) = a_2 \in GA(n, \mathcal{R})$.

Urmînd definiţia dată în [1 ; Cap. II, pg. 124], prin *spaţiu punctual afin* sau pe scurt *spaţiu afin*, vom înţelege un triplet $(\mathfrak{M}, F, \varphi)$ unde $\mathfrak{M}$ este o mulţime de puncte, F un spaţiu linear peste un corp oarecare iar φ, aplicaţia $\overline{\varphi} : F x \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ care reprezintă *acţiunea simplu tranzitivă* a lui $(F, +)$ asupra lui $\mathfrak{M}$. $(F, +)$ este grupul aditiv al lui F.

Se obişnuieşte să se utilizeze notaţia:

$$\varphi(a, x) = a + x \ (= x + a), \quad \forall a \in F, \ x \in \mathfrak{M}.$$

$\mathfrak{M}$ se numeşte *spaţiu bază* iar F *spaţiu director*.

Prin *dimensiune a spaţiului afin* se înţelege dimensiunea lui F. În cele ce urmează vom considera numai spaţii afine peste corpul $\mathcal{R}$ şi cu dimensiuni finite.

Un *reper* într-un spaţiu afin este o pereche $\mathfrak{R}(0, \overline{e}_i)$ unde 0 este un punct oarecare din $\mathfrak{M}$ iar $(\overline{e}_i)$ o bază din F. Pentru $\forall X \in \mathfrak{M}$ avem

$$X = 0 + x^i \overline{e}_i.$$

$(x^i) \in \mathcal{R}^n$ se numesc coordonatele punctului X în reperul $\mathfrak{R}$, iar 0 se numeşte *centrul reperului*.

Pe spaţiul aritmetic $\mathcal{R}^n$ se defineşte o structură de spaţiu afin, notată $\mathcal{A}^n$, considerînd $\mathfrak{M} = \{1\} X \mathcal{R}^n$, $F = \{0\} X R^n$ iar aplicaţia φ dată de

$$\varphi((0, a^i), (1, x^i)) = (1, a^i + x^i), \quad \forall (a^i), (x^i) \in \mathcal{R}^n.$$

Reperul determinat de centrul $0(1, 0, \ldots, 0) \in \{1\} X \mathcal{R}^n$ şi vectorii $\overline{e}_i = (0, \delta^j_i) \in \{0\} X R^n$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, îl vom numi *reper natural*, iar spaţiul afin astfel construit *spaţiu afin tip*.

Grupul $GA(n, \mathcal{R})$ acţionează la dreapta efectiv şi tranzitiv pe $\mathcal{A}^n$ după regula:

$$\forall x \in \mathcal{A}^n ; \ R_a : x(1, x^i) \to R_a(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^i & a^i_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a^i + a^i_j x^j \end{pmatrix}, \tag{5}$$

pentru $a(a^i, a^i_j) \in GA(n, \mathcal{R})$.

Pe un spațiu vectorial T peste $\mathbb{R}$ (dim. $T=n$), se definește o *structură canonică de spațiu afin* TA considerînd: $\mathfrak{M}=TF=\{[\bar{a}]\ ;\ [a]=$clasa lui $\bar{a}\in T$ dată de: $\bar{z}-\bar{y}=\bar{a}\ ;\ \forall(\bar{y},\ \bar{z})\in TXT\}$ și aplicația

$$\varphi([\bar{a}],\ \bar{x})=\bar{a}+\bar{x}.$$

Dacă $(\bar{\varepsilon}_i)$ este o bază a lui T, atunci perechea $\mathfrak{R}(\bar{\varepsilon}_0;\ \bar{\varepsilon}_i)$, cu $\bar{\varepsilon}_0\in T$, determină un reper în TA.

Un izomorfism afin $f: A^n\to TA$ este unic determinat prin condițiile $\varepsilon_0=f(0)$, $\bar{\varepsilon}=\bar{f}(\bar{e}_i)$, unde $\bar{f}: \mathbb{R}^n\to T$ este aplicația lineară asociată lui f. Atunci pentru $\forall X\in T$, există unic $x(1, x^i)\in A^n$ astfel ca

$$f(x)=X=\bar{\varepsilon}_0+x^i\bar{\varepsilon}_i.$$

Această proprietate permite ca un reper $\mathfrak{R}(\bar{\varepsilon}_0,\ \bar{\varepsilon}_i)$ din TA să fie interpretat ca un izomorfism între A^n și TA, cînd spațiul linear T are dimensiunea n.

2. *Translațiile la stînga, automorfismele interioare.*
Vom considera $GA(n, R)$ ca grup Lie dotîndu-l cu structura de varietate diferențiabilă definită de atlasul format cu harta $h(U, \chi)$ corespunzătoare aplicației identice. Atunci $U=GA(n, R)$ și $\chi(a)=(a^i,\ a^i_j)\in R^{n+n^2}$. Punctul unitate al grupului $e\in GA(n, R)$ va avea coordonatele $(0,\ \delta^i_j)$.

Translațiile la stînga $L_a: x\in GA(n,\ \mathbb{R})\to y=L_a(x)=a\cdot x\in GA(n,\ \mathbb{R})$; $a\in GA(n, \mathbb{R})$ vor fi date de relațiile

$$y^i=a^i+a^i_j x^j\ ,\ y^i_h=a^i_j x^j_h\ ,\ (i,\ j,\ h=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{6}$$

Automorfismele interioare $I_a: x\in GA(n,\ \mathbb{R})\to y=I_a(x)=a\,x\,a^{-1}$, $a\in GA(n, R)$, vor fi definite prin relațiile

$$y^i=a^i+a^i_j x^j+\tilde{a}^k\ x^j_k\ a^i_j,\ y^i_h=a^k_h\ x^j_k\ \tilde{a}^i_j\ . \tag{6'}$$

În particular, dacă $a\in G_2$ (adică $a^i=0$), atunci

$$y^i=a^i_j\ x^j\ ,\ y^i_h=a^k_h\ x^j_k\ \tilde{a}^i_j\ . \tag{6''}$$

3. *Algebra Lie* $\mathfrak{L}(GA)$. Prin $\mathfrak{L}(GA)$ vom nota *algebra Lie a cîmpurilor stîng invariante* definite pe GA $(n, \mathbb{R})$. Vom utiliza în cele ce urmează baza $(E_i\ ,\ E^i_j)$ a algebrei Lie $\mathfrak{L}(GA)$ obținută din reperul natural $\left(\frac{\partial}{\partial a^i}\ ,\ \frac{\partial}{\partial a^i_l}\right)_e$ al spațiului linear tangent $T_e(GA)$ în punctul unitate.

Notînd cu $dL_a: T_x(GA)\to T_{ax}(GA)$, diferențiala translației la stînga L_a, deducem:

$$(E_i)_x=dL_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_e=x^h_i\left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right)_x,\ \left(E^j_i\right)_x=dL_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i_j}\right)_x=x^h_i\left(\frac{\partial}{\partial x^h_j}\right)_x. \tag{7}$$

Din calculul croşetelor acestor cîmpuri

$$[E_i, E_j] = 0, [E_i, E_j^h] = -\delta_i^h E_j ,$$

$$[E_i^h, E_j^k] = \delta_j^h E_i^k - \delta_i^k E_j^h . \tag{8}$$

deducem constantele de structură ale grupului

$$C_{ij}^p = C_{ijq}^p = 0 ; \; C_{ij}^h = -\delta_i^h \delta_j^p , \; C_{ijq}^{hp} = 0,$$

$$C_{ij}^h = 0 ; \; C_{ijq}^{hkp} = \delta_j^h \delta_i^p \delta_q^k - \delta_i^k \delta_j^p \delta_q^h . \tag{9}$$

Pentru *formele Pfaff stîng invariante* ale grupului $GA\,(n, R)$, putem introduce o bază (ω^i, ω_j^i), considerînd duala bazei (E_i, E_i^j). Ea va fi determinată de relaţiile:

$$\omega^i(E_k) = \delta_k^i , \quad \omega^i(E_k^h) = 0 ;$$

$$\omega_j^i(E_k) = 0, \quad \omega_j^i(E_k^h) = \delta_k^i \delta_j^h . \tag{10}$$

În raport cu coreperul natural (dx^i, dx_j^i) se obţine

$$\omega^i = x_h^i dx^h , \quad \omega_j^i = x_h^i dx_j^h , \tag{11}$$

şi în consecinţă, ecuaţiile *Maurer-Cartan* pentru GA (n, R) se scriu

$$d\omega^i = -\omega_h^i \wedge \omega^h , \quad d\omega_j^i = -\omega_h^i \wedge \omega_j^h . \tag{12}$$

4. *Reprezentarea adjunctă.* Reamintim următoarele: fie G un grup Lie şi $L(G)$ algebra Lie corespunzătoare, a cîmpurilor stîng invariante. Prin *reprezentarea adjunctă* a grupului Lie G se înţelege [2, pg. 123], reprezentarea $a \in G \to$ $\to \text{adj}\, a \in \text{Hom}\,(\mathfrak{L}(G), \mathfrak{L}(G))$, definită prin intermediul automorfismului interior $I_a : x \in G \to axa^{-1} \in G$.

Pentru grupul afin $GA\,(n, \mathbb{R})$, reprezentarea adjunctă este dată de

Propoziţia 1. Fie $a\,(a^i, a_j^i) \in GA\,(n, \mathbb{R})$. Avem

$$adj\,(E_i) = a_i^h E_h, \; adj\,(E_i^j) = a_i^h E_h^k \tilde{a}_k^j + a_i^h E_h \tilde{a}^j \tag{13}$$

În adevăr, automorfismul interior (6) induce izomorfismul $dI_a : T_x(GA) \to$ $\to T_{Ia}(x)(GA)$. În particular, pentru $x = e$, obţinem izomorfismul $dI_a : T_e(GA) \to$ $\to T_e(GA)$ dat de

$$dI_a \left(\frac{\partial}{\partial a^i}\right)_e = a_i^h \left(\frac{\partial}{\partial a^h}\right)_e, \; dI_a \left(\frac{\partial}{\partial a_j^i}\right)_e = a_i^h \left(\frac{\partial}{\partial a_k^h}\right)_e \tilde{a}_k^j +$$

$$+ a_h^i \left(\frac{\partial}{\partial a^h}\right)_e \tilde{a}^j .$$

Ținînd seama că orice cîmp stîng invariant are componentele constante în baza (E_i, E_i^j) și că $(E_i, E_i^j)_e = \left(\frac{\partial}{\partial a^i}, \frac{\partial}{\partial a_j^i}\right)_e$, deducem (13).

Acest rezultat, la rîndul său, ne permite să stabilim

Propoziția 2. *Dacă identificăm G_2 cu $GL(n, \mathcal{R})$ spațiul cît $GA(n, \mathcal{R})/GL(n, \mathcal{R})$ este un spațiu reductiv. Adică, algebra Lie $\mathfrak{L}(GA)$ se poate scrie ca sumă* directă *sub forma*

$$\mathfrak{L}(GA) = \mathfrak{L}(GL) \oplus A$$

unde $\mathfrak{L}(GL)$ este algebra Lie a grupului $GL(n\ R)$ iar A un subspațiu linear al algebrei Lie $\mathfrak{L}(GA)$, invariant în raport cu adja pentru $\forall\ a \in G_2$.

Rezultă, ținînd seama de (13) și de faptul că $a \in G_2$ este echivalent cu $a^i = \tilde{a}^i = 0$.

§ 2. Fibratul prncipal $A(V_n, GA)$.

1. *Introducerea fibratului principal cu grup structural $GA(n, \mathcal{R})$.* Vom folosi în cele ce urmează noțiunea de spațiu fibrat principal, diferențiabil, local trivial, pe scurt S.F.P., în sensul definiției dată în [6, pg. 193].

Fie V_n o varietate diferențiabilă de clasă C^∞. Vom asocia acestei varietăți, în mod natural, un S.F.P. cu grup structural $GA(n, R)$. În acest sens, stabilim

Propoziția 1. *Fie V_n o varietate diferențiabilă și $A_0 = \{h_\alpha (U_\alpha, \chi_\alpha), \alpha \in J\}$ un atlas admisibil al său. Pentru fiecare pereche de hărți locale $h_\alpha, h_\beta \in A_0$, $(U_\alpha \cap \bigcap U_\beta \neq \emptyset)$,* definim funcția $\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to GA(n, \mathcal{R})$, prin

$$\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta; \quad \varphi_{\beta\alpha}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \end{pmatrix} \in GA(n, \mathcal{R}), \tag{1}$$

unde $\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)$ este matricea Jacobiană a schimbării de coordonate $(x^i) = \chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(y^j)$. Funcțiile corespunzătoare perechilor de hărți (h_α, h_β), (h_β, h_γ), (h_γ, h_α), satisface relației :

$$\varphi_{\gamma\beta}(x) \cdot \varphi_{\beta\alpha}(x) = \varphi_{\gamma\alpha}(x). \tag{2}$$

În adevăr, dacă $(z^h) = \chi_\gamma(x)$, în baza proprietății $\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial y^j}{\partial z^h} = \frac{\partial x^i}{\partial z^h}$, propoziția rezultă imediat.

Deoarece, avem satisfăcută și condiția $\varphi_{\alpha\alpha}(x) = e \in GA(n, R)$, conform *Propoziției 5. 2* [4, pg. 52] putem enunța

Propoziția 2. *Pe o varietate diferențiabilă V_n, de clasă C^∞, se poate construi un S.F.P., $A(V_n, GA)$ care, pentru acoperirea deschisă $\{U_\alpha\}$ dată de zonele geometrice ale unui atlas admisibil al său, admite funcțiile $\varphi_{\beta\alpha}$ date de (1), drept funcții structurale. S.F.P. $A(V_n, GA)$ este determinat pînă la o echivalență.*

Urmînd procedeul de demonstrație dat în [4, pg. 52], vom preciza elementele spațiului $A(V_n, GA)$. Spațiul total A se determină considerînd mai întîi suma topologică $X=\bigcup_a X_a$, a varietăților $X_a=(\alpha, x, a)$; $\alpha \in J$, $x \in U_a$, $a \in GA(n, \mathcal{R})$. Apoi se definește relația de echivalență $(\alpha, x, a) \overset{\rho}{\approx} (\beta, y, b) \Leftrightarrow x=y$, $b=\varphi_{\beta\alpha}(x)$. a și se ia $A=X/\rho=\{[(\alpha, x, a)]\}$ unde $[(\alpha, x, a)]$ este clasa de echivalență a lui $[(\alpha, x, a)]$. Aplicația proiecției π: $A \to V_n$ se definește prin $\pi[(\alpha, x, a)]=x$ iar homeomorfismele de trivializare $\varphi_a : U_a X\, GA \to \pi^{-1}(U_a)$ prin

$$\varphi_a(x, a)=[(\alpha, x, a)], \quad \forall (x, a) \in U_a \; X \; GA \tag{3}$$

Un atlas preferențial $\tilde{A}_0$ al spațiului total A se poate defini cu ajutorul atlasului admisibil A_0 al varietății V_n și al grupului $GA(n, \mathcal{R})$. Dacă h_a $(U_a, \chi_a) \in A_0$, atunci $\tilde{h}_a$ $(\tilde{U}_a, \tilde{\chi}_a) \in \tilde{A}_0$ se determină prin $\tilde{U}_a=\pi^{-1}(U_a)$ și dacă $\chi_a(x)=(x^i)$, $a(a^i, a^i_j)$, atunci

$$\chi_a([(\alpha, x, a)])=(x^i, a^i, a^i_j) \in \mathcal{R}^{n^2+2n} \tag{3'}$$

2. *Fibratul principal al reperelor afine* $Q(V_n)$. Menționat de *A. Lichnerowicz* [5, pg.], acest spațiu a fost utilizat de *I. C. Gasparini* în studiul conexiunilor afine [3, pg. 362]. Ne propunem să stabilim

Propoziția 3. *Fie* V_n *o varietate diferențiabilă de clasă* C^∞. *Spațiul fibrat* $A(V_n, GA)$ *este echivalent cu fibratul principal al reperelor afine* $Q(V_n)$.

Echivalența se consideră în sensul lui *Steenrod* [7] care afirmă că: două spații fibrate cu același spațiu bază, același grup structural, și aceeași fibră tip, sînt echivalente, dacă există un morfism al unuia pe celălalt astfel încît aplicația indusă de acest morfism pe spațiul bază să se reducă la identitate. În baza *Proprietății* V.1.10 și *Observației* 18, [6, pg. 206], rezultă că două S.F.P. care au: aceeași bază, același grup structural, aceleași zone de trivializare și aceleași funcții de trecere, sînt echivalente.

Vom stabili propoziția enunțată arătînd că este posibil să alegem un atlas de trivializare pe $Q(V_n)$ astfel încît să aibă aceleași zone de trivializare și aceleași funcții structurale cu $A(V_n, GA)$.

Reamintim că: un *reper afin* într-un punct $x \in V_n$, este un reper în $TA_x(V_n)$, adică în spațiul linear tangent $T_x(V_n)$ structurat ca spațiu punctual afin; deci este format din sistemul de vectori $(y, y_a) \in T_x(V_n)$, unde (y_a) este un reper linear în $T_x(V_n)$. Fie $A_0=\{h_a(U_a, X_a)\}$ atlasul admisibil de V_n considerat mai sus. Într-o hartă $h_a(U_a, \chi_a) \in A_0$, în fiecare punct $x \in U_a$ se consideră reperul afin $\left(0, \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right)$, unde 0 *este vectorul nul*. Se pot defini atunci homeomorfismele de trivializare $\varphi_a : U_a XGA \to \pi^{-1}(x)$ date de:

$$\forall (x, a=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y^i & y^i_a \end{pmatrix}) \in U_a XGA ; \quad \bar{\varphi}_a(x, a)=$$

$$=z\left(y=y^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \; y_a=y^i_a\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_X\right) \in Q.$$

Pentru determinarea funcțiilor structurale, observăm că

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y^i & y^i_a \end{pmatrix} \in GA \xrightarrow{\bar{\varphi}_{\alpha x}} z \in \pi^{-1}(x) \xrightarrow{\bar{\varphi}^{-1}_{\beta x}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y^{i'} & y^{i'}_a \end{pmatrix} \in GA.$$

Prin urmare:

$$\bar{\varphi}_{\beta\alpha}(x) = \bar{\varphi}^{-1}_{\beta x} \circ \bar{\varphi}_{\alpha x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \end{pmatrix} = \varphi_{\beta\alpha}(x).$$

În consecință, avînd în vedere echivalența celor două spații, putem utiliza pe oricare din ele în problematica ce urmează făcînd identificarea $A \equiv Q$, prin $z = [\,(\alpha, x, a)\,]$. Deoarece $\varphi_{\beta\alpha}(x) \in G_2$, grup izomorf cu $GL(n, \mathcal{R})$, în baza *Propoziției* 5.3. [4, pg. 53] deducem:

Propoziția 4. *Grupul structural* $GA(n, \mathcal{R})$ *al* S.F.P. $A(V_n, GA)$ *este întotdeauna reductibil la* $GL(n, \mathcal{R})$.

3. *Cîmpurile fundamentale pe* $A(V_n, GA)$. Fie $x \in V_n$ și $z_0 \in \pi^{-1}(x)$. Translația la dreapta $R_a : z_0 \to z = R_a(z_0) \equiv z_0 \cdot a$, definită de un element $a\ (a^b, a^b_c) \in GA\ (n, \mathcal{R})$, va fi dată într-o hartă locală $\tilde{h} \in \tilde{A}_0$, de relații de forma:

$$x^i = x^i_0\ ,\ y^i = y^i_0 + a^b y^i_{0b}\ ,\ y^i_b = a^c_b y^i_{0c}\ . \tag{5}$$

Pentru fiecare $z_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ fixat, avem definită aplicația

$$\sigma_{z_0} : a \in GA \to z = \sigma_{z_0}(a) = z_0 \cdot a\ ;\ \forall a \in GA. \tag{6}$$

Prin diferențiala acestei aplicații obținem aplicația $d\sigma_{z_0} : T_e(GA) \to T_{z_0}(Q)$ dată de

$$d\sigma_{z_0}\left(\frac{\partial}{\partial a^b}\right)_e = y^h_{0b}\left(\frac{\partial}{\partial y^h}\right)_{z_0},\ d\sigma_{z_0}\left(\frac{\partial}{\partial a^b_c}\right)_e = y^h_{0b}\left(\frac{\partial}{\partial y^h_c}\right)_{z_0} \tag{7}$$

Punctul $z_0 \in a$, fiind oarecare, cîmpurile

$$E^*_a = y^h_a \frac{\partial}{\partial y^h},\ E^{b*}_a = y^h_a \frac{\partial}{\partial y^h_c}, \tag{8}$$

sînt cîmpuri fundamentale pe Q generate de cîmpurile stîng invariante E_a, E^b_a din $\mathfrak{L}(GA)$. Orice combinație de forma

$$A^* = c^a E^*_a + c^a_b E^{b*}_a\ ,\ c^a,\ c^a_b \in R, \tag{9}$$

va fi un cîmp fundamental pe Q, corespunzător cîmpului

$$A = c^a E_a + c^a_b E^b_a \in \mathfrak{L}(GA).$$

Sistemul de cîmpuri (E^{b*}_a, E^*_a) constituie *o bază globală* pentru cîmpurile fundamentale pe A.

5. *Fibratul asociat* $TA(V_n)$. Fie V_n o varietate diferențiabilă. Pentru fiecare $x \in V_n$, spațiului linear tangent $T_x(V_n)$ *i* se poate asocia în mod canonic o structură de spațiu afin, conform § 1.1. Vom nota $TA_x(V_n)$ spațiul afin astfel obținut. Pe mulțimea $TA(V_n) = \bigcup_x TA_x(V_n)$ se poate induce în mod natural o structură de varietate diferențiabilă analog ca la varietatea diferențiabilă a vectorilor tangenți la V_n. Mai mult, se poate defini pe $TA(V_n)$ o structură de spațiu fibrat $E(TA(V_n), A^n, GA)$, considerînd drept proiecție $\pi_E : TA(V_n) \to V_n$ aplicația care asociază la fiecare punct din TA, punctul de contact al spațiului TA_x corespunzător, cu varietatea; și drept fibră tip spațiul afin tip $\mathcal{A}^n$. La un atlas admisibil $\mathcal{A}_0$ al lui V_n se asociază un atlas de trivializare $\mathcal{A}_0^*$ pe $TA(V_n)$ astfel că dacă $h(U, \chi) \in \mathcal{A}_0$, atunci $h^*(U^*, \varphi) \in \mathcal{A}_0^*$ este dat de $U^* = U$, $\varphi : UX\mathcal{A}^n \to \pi_E^{-1}(U)$ este dată de $\varphi(x, (1, \lambda^i)) = (0, \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x)$. Rezultă de aici că funcțiile structurale sînt date de (1).

Acțiunea grupului $GA(n, \mathcal{R})$ pe fibra tip se verifică imediat că este cea dată de (5) § 1.

Toate aceste elemente ne permit să afirmăm că cele două spații fibrate $TA(V_n)$ și $A(V_n)$ sînt asociate în sensul *Definiției* V. 1.25 [6, pg. 213].

Un reper $z(x, y, y_a) \in A(V_n)$ se poate interpreta ca un izomorfism $z : \mathcal{A}^n \to T\mathcal{A}_x(V_n)$ ca în § 1.1, considerînd

$$z(1, \lambda^a) = y + \lambda^a y_a, \quad \forall (1, \lambda^a) \in A^n.$$

BIBLIOGRAFIE

1. BOURBAKI, N., Éléments de mathématique, Livre II, Algebre; Paris, 1955;
2. CHEVALLEY, C., Theory of Lie Group I, Princeton Univ. Press, 1946;
3. CATTANEO-GASPARINI, I., Sulle connessioni infinitesimali nello spazio fibrato dei referimenti affini di una V_n. Rend. Mat. (3—4), 1958, vol. 17;
4. KOBAYASHI, S., NOMIZU, K., Founations of Differential Geometry, vol. I, 1963;
5. LICHNEVOWICZ, A., Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie Ed. Cremonese, Roma, 1955;
6. PAPUC, D., ALBU, A., Elemente de geometrie diferențială globală, Tipografia Univ. Timișoara, 1970;
7. STEENROD, N. E., The Topology of Fibre Bundles. Princeton Univ. Press, 1951.

SUR LES ESPACES FIBRÊS A GROUPE STRUCTUREL GA (n, R). (I).

(RÉSUMÉ)

Cette note comprend deux paragraphes. Dans le premier on fait une présentation du groupe affine $GA(n,R)$ comme groupe Lie, en determinant les champs gauche invariants, les constantes de structure et la représentation

adjointe. Dans le second on associe de manière naturelle à une variété différentiables un espace fibré principal $A(V_n, GA)$, qui est équivalent au fibré principal des repères affines.

Les deux paragraphes constituent la partie introductive d'un travail qui continuera par une étude des connexions infinitésimales dans $A(V_n, GA)$.

О РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СТРУКТУРНОЙ ГРУППОЙ GA (n, R).

(РЕЗЮМЕ)

Настоящая заметка содержит два параграфа. Во первом сделано представление аффиной группы GA (n, R как групп Ли, определяясь налево инвариантные поля, структурные константы и адъюнктное отображение.

Во втором разделе работы главное расслоенное пространство A(Vn, GA) естественно сопоставляется дифференциальному многообразию и это расслоенное пространство эквивалентно главному расслоенному пространству аффиных реперов.

Оба параграфа представляют собой вводную часть работы, которая продолжаэтся изучением инфинитезимальных связанностей в $A(V_n, GA)$.

ASUPRA UNOR FORMULĂRI ALE PRINCIPIULUI ACȚIUNII

DE

M. BORNEAS, M. DAVID ȘI I. MIRON

I

Se cunoaște din matematică [1] următoarea teoremă (teorema I): variația asincronă a integralei

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L\left(t, \ldots x_k, \ldots \frac{dx_k}{dt}, \ldots\right) \tag{1}$$

$$(k=1,2 \ldots\ldots n)$$

extinsă la curba $C_{(n)}$ din varietatea V_n este egală cu variația sincronă a aceleiași integrale extinsă la curba $C_{(n+1)}$ din varietatea V_{n+1}. Avînd în vedere această teoremă, principiul acțiunii din mecanică poate fi reformulat după cum se va vedea mai jos.

Se știe că [2], [3], [4], dacă se includ variațiile la frontieră, se poate scrie

$$\delta_a \int_{t_1}^{t_2} dt\ L\left(t, \ldots x_k, \ldots \dot{x}_k, \ldots\right) = G(t_2) - G(t_1) \tag{2}$$

$$(k=1,\ 2,\ 3)$$

unde cu indicele „a" am notat variația asincronă, $\dot{x}_k = dx_k/dt$, G sînt termeni de frontieră.

Efectuînd variația de mai sus rezultă

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = 0 \tag{3}$$

$$G = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\,\delta x_k - \left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\,\dot{x}_k - L\right)\delta t$$

$$= \sum_k p_k\,\delta x_k - H\delta t \tag{4}$$

cu notațiile evidente. Făcînd transformările

$$t=t(\tau) \tag{5}$$

$$x_k = f_k(t) = f_k[t(\tau)] = g_k(\tau) \tag{6}$$

și cu notațiile

$$t=x_4 \tag{7}$$

$$x'_\lambda = \frac{dx_\lambda}{d\tau} \tag{8}$$

$$\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt} = \frac{dx_k/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{x'_k}{t'} \tag{9}$$

putem scrie o nouă funcție Lagrange

$$\Lambda(\ldots x_\lambda, \ldots x'_\lambda, \ldots) = \frac{dt}{d\tau} L\left(t, \ldots x_k, \ldots \frac{dx_k}{dt}, \ldots\right). \tag{10}$$

Utilizînd teorema I putem exprima principiul acțiunii prin formula

$$\delta_s \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Lambda(\ldots x_\lambda, \ldots x'_\lambda, \ldots) = \Gamma(\tau_2) - \Gamma(\tau_1) \tag{11}$$

$$(\lambda = 1, 2, 3, 4)$$

unde „s" indică variația sincronă. Aceasta conduce în locul relațiilor (3) și (4) la relațiile

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\lambda} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\lambda} = 0 \tag{12}$$

și

$$\Gamma = \sum_\lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\lambda} \delta x_\lambda = \sum_\lambda \pi_\lambda \delta x_\lambda \tag{13}$$

de asemenea cu notațiile evidente.

Să aflăm componentele lui π_λ. Cele spațiale sînt:

$$\pi_k = \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_k} = \frac{\partial}{\partial x'_k} t' L = t' \frac{\partial L}{\partial x'_k} = t' \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x'_k} = t' \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\frac{\partial}{\partial x'_k}\frac{x'_k}{t'} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = p_k \tag{14}$$

(s-a avut în vedere că x'_k intră în L prin intermediul lui $\dot{x}_k$). Componenta temporală este:

$$\pi_4 = \frac{\partial \Lambda}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'} t' L = L + t' \frac{\partial L}{\partial t'} = L + t' \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial t'} =$$

$$=L+t'\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\frac{\partial}{\partial t'}\frac{x'_k}{t'} = L+t'\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\left(-\frac{x'_k}{(t')^2}\right)$$

$$=L+\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\dot{x}_k = -H \tag{15}$$

(t' intră în L prin intermediul tuturor variabilelor $\dot{x}_k$).

De asemenea ecuațiile (12) pot fi puse pentru componentele spațiale în formele succesive

$$\frac{\partial}{\partial x_k}t'L - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x'_k}t'L = 0$$

$$t'\frac{\partial L}{\partial x_k} - \frac{\mathrm{d}}{\underset{t'}{\mathrm{d}t}}\frac{\partial}{\partial(\dot{x}_k t')}t'L = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = 0$$

adică ecuațiile de mișcare, iar pentru componenta temporală

$$\frac{\partial}{\partial t}t'L - \frac{\mathrm{d}}{\underset{t'}{\mathrm{d}t}}\frac{\partial}{\partial t'}t'L = 0$$

$$t'\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\mathrm{d}}{\underset{t'}{\mathrm{d}t}}\left(L+t'\frac{\partial L}{\partial t'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-H) = 0$$

(s-a ținut seama de (16), adică legea energiei)

$$H = \text{const.}$$

dacă L nu depinde explicit de t.

Așa dar prin procedeul de mai sus se pot îngloba impulsul și energia în o singură mărime cu patru componente, iar ecuațiile Euler — Lagrange cuprind atît ecuațiile de mișcare cît și ecuația energiei. Expresiile generatorilor (13) conduc la regăsirea legilor de conservare pentru π_λ, adică pentru impuls și energie.

Să calculăm mai jos un exemplu, fie:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + Fx \tag{16}$$

Atunci din (9) obținem:

$$\Lambda = \frac{dt}{d\tau}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + Fx\right] = t'\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx/d\tau}{dt/d\tau}\right)^2 + Fx\right]$$

$$= t'\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x'}{t'}\right)^2 + Fx\right] = \frac{m}{2}\frac{1}{t'}(x')^2 + t'Fx\,. \tag{17}$$

Calculăm după (13) pe π_λ

$$\pi_k = m\frac{1}{t'}x' = m\dot{x} = p$$

$$\pi_4 = -\frac{m}{2}\frac{(x')^2}{(t')^2} + Fx = -H. \tag{18}$$

Din (12) rezultă:

$$t'F = \frac{d}{d\tau}m\frac{1}{t'}x' = \frac{\frac{d}{dt}m\frac{x'}{t'}}{t'} = t'm\frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} \tag{19}$$

adică (cu $t' \neq 0$)

$$F = m\ddot{x} \tag{20}$$

și

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(-\frac{m}{2}\frac{(x')^2}{(t')^2} + Fx\right) = t'\frac{d}{dt}\left[-\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + Fx\right] \tag{21}$$

de unde:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} - Fx = \text{const.} \tag{22}$$

II

Alegerea unei funcții Lagrange cu derivate superioare permite dezvoltarea unei mecanici pe această bază [5]. Să urmărim în ce măsură principiul acțiunii în forma (11) poate fi extins și la această mecanică. În acest scop să considerăm integrala

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt\; L\left(t, \ldots x_k, \ldots \frac{d^r x_k}{dt^r}, \ldots\right) \tag{23}$$

$$(k = 1, 2, \ldots n)$$

și să ne limităm la cazul mai simplu $r = 1, 2$.

Făcînd transformările de parametru (5) și (6), și ținînd seama de (9) putem scrie:

$$\ddot{x}_k = \frac{d^2x_k}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dx_k}{dt} = \frac{d\,(dx_k/dt)/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{d\dot{x}_k/d\tau}{dt/d\tau} = (t')^{-1}\frac{d\,(x_k'/t')}{d\tau}$$

$$= x_k''(t')^{-2} - x_k'(t')^{-3}t'' \tag{24}$$

Pe de altă parte integrala (23) poate fi scrisă în forma:

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{dt}{d\tau} L\left(t, \ldots x_k, \ldots \frac{d^\nu x_k}{dt^\nu}, \ldots\right)$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{dt}{d\tau} L\left(t, \ldots x_k, \ldots T_j \frac{d^j x_k}{d\tau^j}, \ldots\right)$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{dt}{d\tau} L\left(\ldots x_k, \ldots x_{n+1}, \ldots T_\nu \frac{d^\nu x_k}{d\tau^\nu}, \ldots\right) \tag{25}$$

T_j fiind funcții de $dt/d\tau$, $d^2t/d\tau^2$, etc.

Făcînd notația

$$\frac{dt}{d\tau} L\left(\ldots x_k, \ldots x_{n+1}, \ldots T_\nu \frac{d^\nu x_k}{d\tau^\nu}, \ldots\right) = \Lambda\left(\ldots x_\nu, \ldots \frac{d^\nu x_\lambda}{d\tau^\nu}, \ldots\right) \tag{26}$$

obținem

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, \Lambda\left(\ldots x_\lambda, \ldots \frac{d^\nu x_\lambda}{d\tau^\nu}, \ldots\right). \tag{27}$$

Variația asincronă a integralei (23) se scrie [4]

$$\delta_a I = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_k \sum_{\nu=0} (-1)^\nu \left(\frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial L}{\partial (d^\nu x_k/dt^\nu)}\right) \delta x_k \right.$$

$$- \left[\frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_k \sum_{\nu=0} (-1)^\nu \left(\frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial L}{\partial (d^\nu x_k/dt^\nu)}\right) \frac{dx_k}{dt}\right.$$

$$\left.\left. - \sum_k \sum_{\nu=0} \frac{\partial L}{\partial (d^\nu x_k/dt^\nu)} \frac{d^{\nu+1}}{dt^{\nu+1}} x_k \right] \delta t \right\} +$$

$$+\left|\sum_k\sum_{\gamma=1}^{\gamma-1}\sum_{j=0}^{\gamma-1}(-1)^j\left(\frac{d^j}{dt^j}\frac{\partial L}{\partial(d^\gamma x_k/dt^\gamma)}\right)\frac{d^{\gamma-j-1}}{dt^{\gamma-j-1}}\delta x_k-\right.$$

$$-\sum_k\sum_{\gamma=1}^{\gamma-1}\sum_{j=0}^{\gamma-1}(-1)^j\left(\frac{d^j}{dt^j}\frac{\partial L}{\partial(d^\gamma x_k/dt^\gamma)}\frac{d^{\gamma-j-1}}{dt^{\gamma-j-1}}\left(\frac{dx_k}{dt}\delta t\right)+\right.$$

$$\left.+L\,\delta t\right|_{t_1}^{t_2} \tag{28}$$

iar variaţia sincronă a integralei (27) este

$$\delta_s I=\int_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau\sum_\lambda\sum_{\gamma=0}(-1)^\gamma\left(\frac{d^\gamma}{d\tau^\gamma}\frac{\partial\Lambda}{\partial(d^\gamma x_\lambda/d\tau^\gamma)}\right)\delta x_\lambda+$$

$$+\left|\sum_\lambda\sum_{\gamma=1}^{\gamma-1}\sum_{j=0}^{\gamma-1}(-1)^j\left(\frac{d^j}{d\tau^j}\frac{\partial\Lambda}{\partial(d^\gamma x_\lambda/d\tau^\gamma)}\right)\frac{d^{\gamma-j-1}}{d\tau^{\gamma-j-1}}\delta x_\lambda\right|_{\tau_1}^{\tau_2}. \tag{29}$$

Pentru a compara cele două variaţii să luăm întîi integranzii.

În cazul nostru — cu $r=0, 1, 2$ — din (28) avem

$$\sum_k\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot x_k}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot x_k}\right)\delta x_k-$$

$$-\sum_k\left[\frac{dL}{dt}-\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial x_k}\dot x_k-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot x_k}\dot x_k\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot x_k}\right)\dot x_k-\frac{\partial L}{\partial x_k}\dot x_k-\frac{\partial L}{\partial\dot x_k}\ddot x_k-\frac{\partial L}{\partial\ddot x_k}\dddot x_k\right]\delta t=$$

$$=\sum_k\left(\frac{\partial L}{\partial x_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot x_k}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot x_k}\right)\delta x_k-$$

$$-\sum_k\left[\frac{dL}{dt}-\frac{\partial L}{\partial t}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x_k}\dot x_k\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial\ddot x_k}\dot x_k\right)\right.$$

$$\left.-2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\ddot x_k}\ddot x_k\right)\right]\delta t. \tag{30}$$

Pe de altă parte din (29) putem scrie

$$\sum_\lambda\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\lambda}-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\lambda}+\frac{d^2}{d\tau^2}\frac{\partial\Lambda}{\partial x''_\lambda}\right)\delta x_\lambda=$$

$$= \sum_k \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_k'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_k''} \right) \delta x_k +$$

$$+ \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial t'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} \frac{\partial \Lambda}{\partial t''} \right) \delta t. \tag{31}$$

Avînd în vedere (26) și faptul că L depinde de x_k', x_k'', t' și t'' prin intermediul variabilelor $\dot{x}_k$ și $\ddot{x}_k$, putem transforma (31) precum urmează.

Partea spațială va da

$$\sum_k \left(t' \frac{\partial L}{\partial x_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} t' \frac{\partial L}{\partial x_k'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} t' \frac{\partial L}{\partial x_k''} \right) \delta x_k =$$

$$= \sum_k \left[t' \frac{\partial L}{\partial x_k} - t'' \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x_k'} - t'' \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial x_k'} - \right.$$

$$- t' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x_k'} \right) - t' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial x_k'} \right) +$$

$$+ t''' \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial x_k''} + 2t'' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial x_k''} \right) +$$

$$\left. + t' \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial x_k''} \right) \right] \delta x_k = \sum_k \left\{ t' \frac{\partial L}{\partial x_k} - \right.$$

$$- \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} (t')^{-1} t'' + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \left[- (t')^{-3} (t'')^2 \right] -$$

$$- \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) t' + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} (t')^{-1} t'' + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \right) (t')^{-1} t'' -$$

$$- \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} t' \left[3 (t')^{-4} (t'')^2 - (t')^{-3} t''' \right] +$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} (t')^{-2} t''' + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} 2 (t')^{-1} t'' + \right.$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \left[-4 (t')^{-3} (t'')^2 \right] + \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \right) t' +$$

$$+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}\right)[-3\,(t')^{-2}t''] +$$

$$+\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}[6(t')^{-1}\,(t'')^2 - 2\,(t')^{-3}t'''] \Big\}\,\delta x_k =$$

$$= t' \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial x_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}\right) \tag{32}$$

adică tocmai partea spațială din (30) înmulțită cu t'.
Partea temporală va da

$$\left[t'\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial t'}{\partial t'}L\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(t'\frac{\partial L}{\partial t'}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\left(t'\frac{\partial L}{\partial t''}\right)\right]\,\delta t = t'\left[\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} -\right.$$

$$- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t'\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial t'}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t'\sum_k \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}\frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial t'}\right) +$$

$$\left. + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}t'\sum_k \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}\frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial t''}\right)\right]\,\delta t =$$

$$= t'\sum_k \left\{\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t'\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\left(-x_k'\,(t')^{-2}\right)\right] -\right.$$

$$- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t'\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}(-2x_k''\,(t')^{-3} + 3x_k'(t')^{-4}t'')\right] +$$

$$\left. + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}t'\,(-x_k'(t')^{-3})\right]\right\}\delta t. \tag{33}$$

Ultima expresie din (33) se mai poate scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}(-x_k'\,(t')^{-1})\;(t')^{-1}\right] =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t'\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}(-x_k'\,(t')^{-1})\;(t')^{-1}\right] +\right.$$

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(t')^{-1}\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}(-x_k'(t')^{-1})\right]=$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}\dot{x}_k\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}(x_k'(t')^{-2}t'')\right].$$

Introducînd această expresie în (33) și făcînd reducerile posibile obținem

$$t'\sum_k\left[\frac{\partial L}{\partial t}-\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\dot{x}_k\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}\dot{x}_k\right)+2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}\ddot{x}_k\right)\right]\delta t$$

expresie identică cu partea temporală din (30) înmulțită cu t'. Se vede deci că integralele din variațiile sincronă și asincronă sînt egale.

În continuare să luăm în considerare părțile integrate. Din (28) avem

$$\sum_k\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\delta x_k+\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x_k-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}\right)\delta x_k\right]$$

$$-\sum_k\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\dot{x}_k\,\delta t+\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}_k\,\delta t)-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}\right)\dot{x}_k\delta t+L\delta t=\right.$$

$$=\sum_k\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\delta x_k+\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x_k-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}\right)\delta x_k\right]-$$

$$-\sum_k\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\dot{x}_k\,\delta t+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}\dot{x}_k\,\delta t\right)-2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k}\right)\dot{x}_k\,\delta t\right]+L\,\delta t. \qquad (34)$$

Pe de altă parte din (29) avem

$$\sum_\lambda\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\lambda'}\delta x_\lambda+\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\lambda''}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta x_\lambda-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\lambda''}\right)\delta x_\lambda\right]=$$

$$=\sum_k\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k'}\delta x_k+\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k''}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta x_k-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k''}\right)\delta x_k\right]+$$

$$+\frac{\partial \Lambda}{\partial t'}\,\delta t+\frac{\partial \Lambda}{\partial t''}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\delta t-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial t''}\right)\delta t.$$

Partea spaţială conduce la

$$\sum_k \left[t' \frac{\partial L}{\partial x'_k} \delta x_k + t' \frac{\partial L}{\partial x''_k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \delta x_k - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} t' \frac{\partial L}{\partial x''_k} \right) \delta x_k \right] =$$

$$= \sum_k \left[t' \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x'_k} \delta x_k + t' \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial x'_k} \delta x_k + \right.$$

$$\left. + t' \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial x''_k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \delta x_k - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} t' \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial x''_k} \right) \delta x_k \right] =$$

$$= \sum_k \left\{ t' \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} (t')^{-1} \delta x_k + t' \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} [-(t')^{-3} t''] \delta x_k + \right.$$

$$\left. + t' \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} (t')^{-2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \delta x_k - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} t' \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} (t')^{-2} \right] \delta x_k \right\} =$$

$$= \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \delta x_k + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \delta x_k - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \right) \delta x_k \right], \tag{35}$$

iar partea temporală dă

$$\frac{\partial t'}{\partial t'} L \delta t + t' \frac{\partial L}{\partial t'} \delta t + t' \frac{\partial L}{\partial t''} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \delta t - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} t' \frac{\partial L}{\partial t''} \right) \delta t =$$

$$= L \delta t + \sum_k \left[t' \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial t'} \delta t + t' \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial t'} \delta t + \right.$$

$$\left. + t' \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial t''} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \delta t - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} t' \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial t''} \right) \delta t \right] =$$

$$= L \delta t + \sum_k \left\{ t' \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} [-x'_k (t')^{-2}] \delta t + \right.$$

$$+ t' \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} [-2x''_k (t')^{-3} + 3x'_k (t')^{-4} t''] \delta t +$$

$$\left. + t' \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} [-x'_k (t')^{-3}] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \delta t - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} t' \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} (-x'_k (t')^{-3}) \right] \delta t \right\} =$$

$$= L\delta t - \sum_k \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k \delta t + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \left[x_k'' (t')^{-2} - x_k' (t')^{-3} t'' \right] \delta t - \right.$$

$$- \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \right) \dot{x}_k \delta t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \dot{x}_k \delta t \right) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \right) \dot{x}_k \delta t -$$

$$\left. - \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \ddot{x}_k \delta t \right\} = L \delta t - \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k \delta t + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \dot{x}_k \delta t \right) - 2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_k} \right) \dot{x}_k \delta t \right]. \tag{36}$$

Adunînd (35) cu (36) obținem tocmai (34) așa dar și părțile integrate din (28) și (29) sînt egale.

Astfel am dovedit că variația asincronă (28) și sincronă (29) sînt egale și pentru funcții Lagrange conținînd derivate de ordinul doi.

Urmează că putem extinde teorema *I* în forma următoare (teorema II): variația asincronă a integralei

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L \left(t, \ldots x_k, \ldots \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}, \ldots \frac{\mathrm{d}^2 x_k}{\mathrm{d}t^2}, \ldots \right) \tag{37}$$

din varietatea V_n este egală cu variația sincronă a aceleiași integrale din varietatea V_{n+1}. Urmează că și principiul acțiunii pentru funcții Lagrange cu derivate pînă la ordinul doi poate fi reformulat analog cu (11).

În ceea ce privește cazul general al derivatelor pînă la ordinul N, calculele pot fi duse în mod analog. Deși aceste calcule sînt extrem de laborioase, succesul repurtat prin trecerea de la funcții Lagrange cu derivate de ordinul unu la funcții Lagrange cu derivate de ordinul doi, sugerează rezultate analoge și pentru funcții Lagrange cu derivate pînă la ordinul *N*.

BIBLIOGRAFIE

[1] N. Teodorescu, *Curs de ecuațiile fizicii matematice*, Ed. didactică și pedagogică, București 1963, p. 70.

[2] M. Borneas, Analele Univ. Timișoara, seria șt. mat.-fiz., *6*, 117 (1968).

[3] I. Krüger și D. Callebant, Am. J. Phys., *36*, 557 (1968).

[4] M. Borneas, Phys. Rev., *186*, (1969).

[5] M. Borneas, Am. J. Phys., *27*, 265 (1959).

ON SOME FORMULATIONS OF THE ACTION PRINCIPLE

SUMMARY

Starting with a theorem on the equality of asynchronous and synchronous variations of some integrals (theorem I), the action principle in mechanics is reformulated, using the synchronous variation, and a quadridimensional expression is introduced. Further on, theorem I is extended to the case of Lagrange functions with derivatives up to the second order (theorem II). With the help of this theorem the action principle in the generalized mechanics is reformulated.

К ФОМУЛИРОВКЕ ПРИНЦЫПА ВОЗДЕЙСТВИЯ

(РЕЗЮМЕ)

На основании теоремы равенства между асинхронным и синхронным изменением интеграла (теорема I), приводится новая формулировка принцыпа механического воздействия, применяя синхронное изменение и четырехмерное определение.

Затем обобщается теорема I на случай функций Лагранмжа с производными до второго порядка (теорема II). При помощи последней приводится новая формулировка принцыпа воздействия в обобщенной механике.

EXPERIMENTELLE UND THEORETISCHE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE ÄNDERUNG DER KOERZITIVKRAFT BEI VERMINDERUNG DER INNEREN SPANNUNGEN IN EISEN – NICKEL – LEGIERUNGEN.

DE

A. MUNTEANU, C. MARCU, R. BAEA

Einleitung

Aus der Literatur ist bekannt, da|3 thermische Vorbehandlungen zu einer Verminderung der inneren Spannungen, sowie zu strukturellen Modifizierungen führen, die eine Änderung der magnetischen Eigenschaften ferromagnetischer Eisen-Nickel-Legierungen zur Folge haben [1], [2].

Der Zusammenhang, der zwischen den Strukturänderungen der, verschiedenen thermischen Vorbehandlungen unterworfenen Materialien und den Änderungen ihrer magnetischen Eigenschaften erscheint, kann zu wertvollen Aufschlüssen in bezug auf den inneren Mechanismus der Ummagnetisierung führen.

Andererseits stellen, vom praktischen Standpunkt aus betrachtet, die thermischen Behandlungen einen wichtigen Faktor zur Erzeugung der, für einen bestimmten Bereich vorteilhaftesten magnetischen Charakteristika dar.

Sehr häufig wird die Eisen-Nickel-Legierung zur Herstellung magnetischer Speicherelemente verwendet. Als zylindrische Drähte mit kreisförmigem Querschnitt findet diese Legierung Anwendung in der Herstellung magnetischer Speicher in For von „Twistor" [3], [4], [5].

In der vorliegenden Arbeit haben wir die Änderungen der magnetischen Eigenschaften der Drähte einer Fe-Ni-Legierung verschiedenen Komponentenverhältnisses unter dem Einfluss unterschiedlicher thermischer Behandlungen verfolgt.

Experimenteller Teil

Die von uns verwendeten Proben hatten bzw. einen Gehalt von 36%, 46%, 54% und 79% Ni. Der Drahtdurchmesser betrug 0,3 mm.

Die Untersuchung der magnetischen Eigenschaften wurde mit Hilfe der Ummagnetisierungsmethode bei 50 Hz durchgeführt, indem für jede thermisch behandelte Probe die Hysteresisschleife [6] im Vergleich zu den Hysteresisschleifen der unbehandelten Proben aufgenommen wurde.

Die Aufnahme der Hysteresisschleife erfolgte in einer zur Achse der zylindrischen Probe sowie zur Richtung des äu|3eren magnetischen Wechselfeldes parallelen Richtung.

Aus der graphischen Analyse der so erhaltenen Hysteresisschleifen, deren einige wir in Figuren 1 und 2 wiedergeben, haben wir die Koerzitivkraft herausgegriffen.

Diese Grösse spielt eine wichtige Rolle bei der Herstellung der magnetischen Speicherelemente von der Art „Twistor" [7].

Die zylindrischen Fe-Ni-Proben wurden folgenden thermischen Behandlungen unterworfen.

1) Erhitzung der Probe von der Zimmertemperatur auf 300 °C mit einer Geschwindigkeit von 275 °C/Stunde, dann Beibehaltung dieser Temperatur etwa 5 Stunden mit einer Genauigkeit von ±5 °C und nachfolgende Abkühlung mit einer Geschwindigkeit von 70 °C/Stunde.

2) Dieselben Bedingungen wie bei der vorangegangenen Behandlung, nur währt die Behandlungsdauer diesmal 6 Stunden.

3) Dieselben Bedingungen wie in beiden voranerwähnten Fällen, mit einer Behandlungsdauer von 7 Stunden.

4) Erhitzung der Probe von der Zimmertemperatur auf 700 °C mit einer Geschwindigkeit von 28 °C/Minute, dann Beibehaltung dieser Temperatur während einer Stunde und nachfolgende Abkühlung bis zur Zimmertemperatur mit einer Geschwindigkeit von 28 °C/Minute.

5) Dieselben Bedingugen wie bei Behandlung 4), nur daß die Abkühlung in einem axialen Magnetfeld von 400 Oe, mit einer Geschwindigkeit von 28 °C/Minute stattfindet.

Diskussion der Ergebnisse

Die Ergebnisse der graphischen Analyse der Hysteresisschleifen sind in Tabelle I eingetragen.

Tabelle I

% Ni-Gehalt	36			46		54		79
Behandlungsart	H_c	$\frac{H_{cr}}{H_{ck}}$	H_c	$\frac{H_{cr}}{H_{ck}}$	H_c	$\frac{H_{cr}}{H_{ck}}$	H_c	$\frac{H_{cr}}{H_{ck}}$
Unbehandelt	12,45		10,70	1,028	11,65		10,85	
1)	—	—	10,41	1,028	10,98	1,061	10,96	0,990
2)	11,57	1,076	11,09	0,899	11,40	1,022	10,06	1,079
3)	10,26	1,214	9,58	1,117	10,07	1,156	9,63	1,127
4)	9,80	1,27	9,75	1,097	9,66	1,206	10,45	1,038
5)	10,55	1,178	9,8	1,092	9,97	1,168	10,68	1,016

Um einen besseren Vergleich zu ermöglichen, wurden diese Ergebnisse in Figur 3 eingezeichnet, welche die Abhängigkeit der Koerzitivkraft (H_c) von der Legierungszusammensetzung für die verschiedenen thermischen Behandlungen wiedergibt.

Auch wurden zwecks Vergleichs die jeweiligen, ohne Vorbehandlung der vier Legierungen erhaltenen Werte eingetragen.

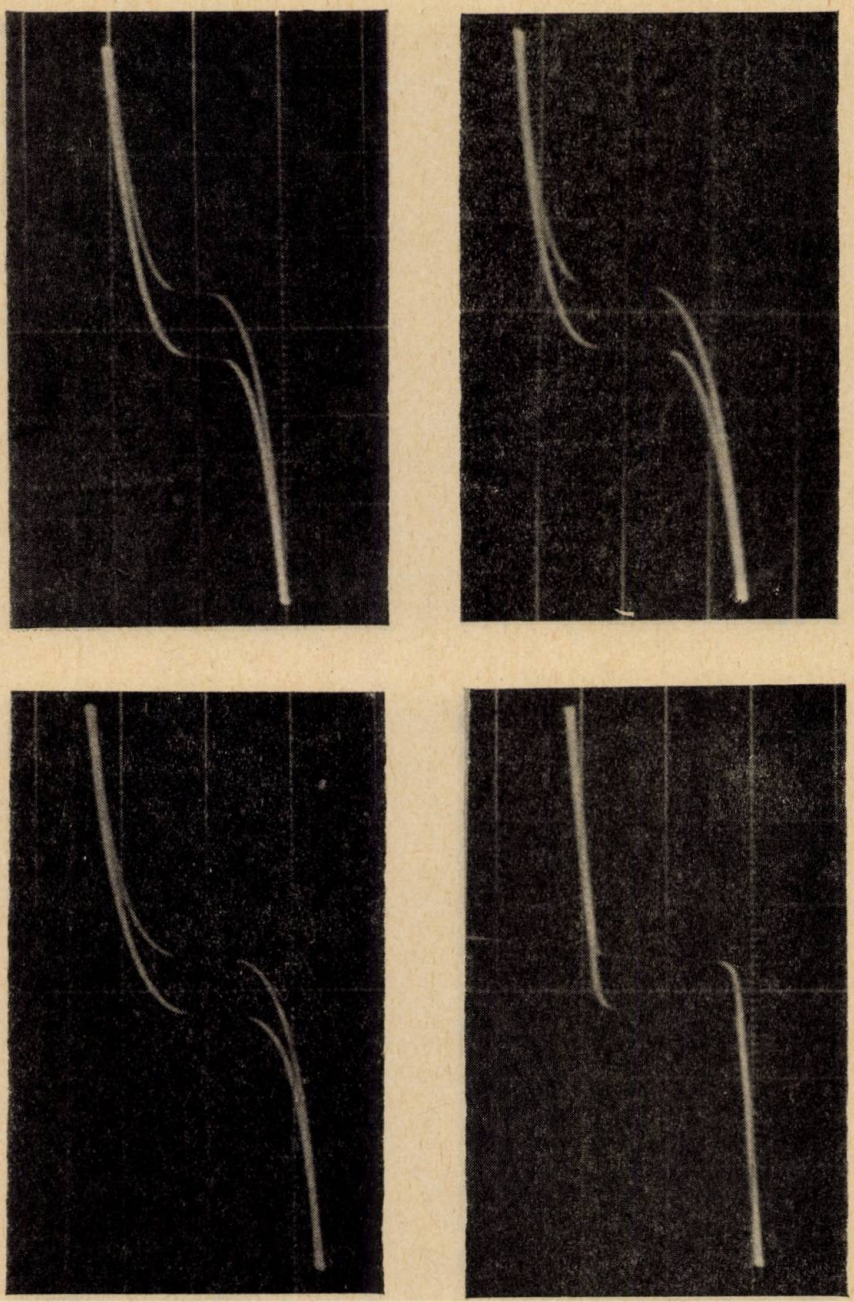


Fig. 1. Hysteresisschleife der unbehandelten Fe-Ni-Drähte, nit a) 36% Ni ; b) 46% Ni ; 54% Ni bei c) und 79% Ni bei d).

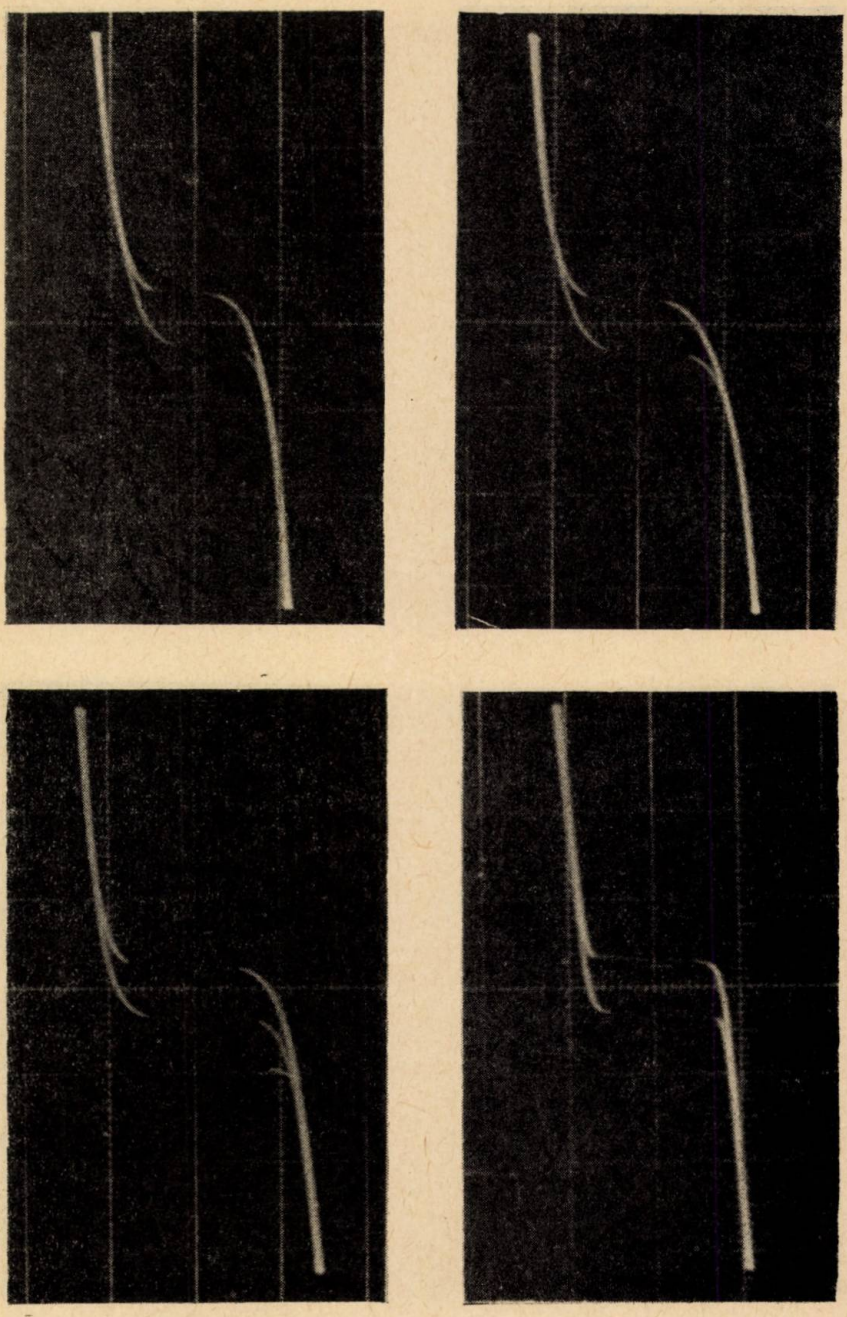


Fig. 2. Hysteresisschleife der Fe—Ni—Drähte die einer thermischen Behandlung der Art 4) unterworfen wurden, mit a) 36% Ni ; b) 46% Ni ; c) 54% Ni und d) 79% Ni.

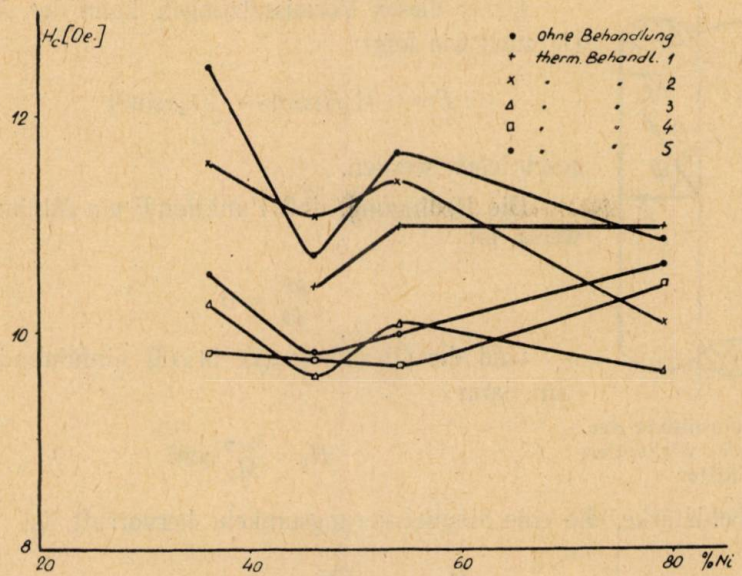


Fig. 3. Abhängigkeit der Koerzitivkraft vom Komponentenverhältnis der Fe—Ni—Legierung. Parameter : thermische Behandlung.

Aus den so erhaltenen experimentellen Werten kann man feststellen, daß für alle untersuchten Legierungszusammensetzungen bei Fe-Ni, die thermische Behandlung eine Herabsetzung der Koerzitivkraft zur Folge hat.

Betrachtet man nun ein Monodomenium zylindrischer Form einer vielkristallinen Struktur aus einem Werkstoff, der eine mittlere Sättigungsmagnetostriktion λ_s hat, so kann die spezifische freie Energie, die diesen Einzelbereich charakterisiert, welcher sich in einem äußeren magnetischen Wechselfeld befindet, durch die Gleichung

$$F = -M_s H \cos\theta - \frac{3}{2}\lambda_s \tau \cos^2\varphi \qquad (1)$$

ausgedrückt werden, wo

M_s — das magnetische Moment der Volumeneinheit,

τ — die tangentiellen inneren Spannungen,

θ — der Winkel, den die Feldrichtung mit dem magnetischen Moment und

φ — der Winkel, den die Spannungsrichtung mit dem magnetischen Moment bilden,

bedeuten (Fig. 4)

Da die Proben vor der thermischen Behandlung von einem Ring abgewickelt wurden, besaßen sie die den tangentiellen Spannungen charakteristichen Verformungen; dies erlaubte uns, daß wir in der magnetoelastischen spezifischen Energie nur das Vorhandensein tangentieller Spannungen in Betracht zogen, welche so wie in Figur 4 gezeigt wird, orientiert sind.

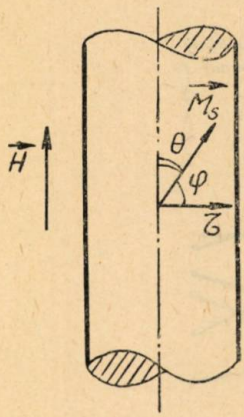


Fig. 4. Beschreibung der, auf Vektor M wirkenden Kräfte.

Unter diesen Voraussetzungen kann der Ausdruck (1) auch wie folgt

$$F = -M_s H\cos\theta - \frac{3}{2}\lambda_s \tau \sin^2\theta \tag{2}$$

geschrieben werden.

Die Bedingung, daß Funktion F ein Minimum aufweise, ist

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0 \tag{3}$$

Und die Gleichung (2) in (3) einführend, erhält man dann

$$H_\theta = \frac{3\lambda_s \tau}{M_s}\cos\theta \tag{4}$$

Die Feldstärke, die eine Magnetisierungsumkehr hervorruft, ist

$$H_{c,\tau} = -\frac{3\lambda_s \tau}{M_s} \tag{5}$$

Wenn die magnetokristalline Energie (ohne innere Spannungen) vorherrscht, kann die freie Energie

$$F = K\sin^2\theta - M_s H\cos\theta \tag{6}$$

geschrieben werden.

Die Bedingung, unter welcher die Funktion F aus Gleichung (6) ein Extremum aufweist, führt uns zu einem Wert des Feldes, der durch den Ausdruck.

$$H_0 = -\frac{2K}{M_s}\cos\theta \tag{7}$$

gegeben wird.

Das Feld, das die Magnetisierungsumkehr hervorruft, die Koerzitivkraft, wird dann

$$H_{c,K} = -\frac{2K}{M_s} \tag{8}$$

Nach 4 kann man die mittlere Koerzitivkraft im Falle einer vielkristallinen Einbereichstruktur durch

$$H_{c,K} = -0{,}64\frac{K_1}{M_s} \tag{9}$$

ausdrücken.

Als Folge der vorgenommenen thermischen Behandlungen kann man annehmen, daß der größte Teil der inneren Spannungen entfernt wurde.

Aus dem Verhältnis der Gleichungen (5) und (9) (Koerzitivkraft der Proben mit inneren Spannungen zur Koerzitivkraft derselben Proben nach der thermischen Behandlung, wenn die magnetokristalline Energie vorherrscht) erhält man :

$$\frac{H_c}{H_{cK}} = 4{,}69\,\frac{\lambda_s}{K} \tag{10}$$

Da die Makrospannungen etwa 1/1 000 der im plastisch deformierten Metall gespeicherten Energie darstellen, können die tangentiellen Spannungen durch

$$\tau = \frac{\tau_a}{1000} \tag{11}$$

ausgedrückt werden, wo mit τ_a die zulässige Spannung des Materials bezeichnet wird.

In Tabelle II sind die Werte für das Verhältnis $H_{c\tau}/H_{cK}$ eingetragen, die mit Hilfe des Verhältnisses λ_s/K berechnet wurden, wo die Werte für λ_s und K der Literatur entnommen wurden [8] und [9].

Tabelle II

Ni-Gehalt in %	$\frac{\lambda_s}{K}\,10^6$ CGS Einheiten	$\frac{H_c}{H_{cK}}$
36	4	1,048
46	3,38	0,885
54	4,69	1,28
79	3,5	0,916

In Tabelle I sind außer den Werten für die Koerzitivkraft H_c auch jene für das Verhältnis $H_{c\tau}/H_{cK}$ eingetragen.

Wenn man nun die experimentell erhaltenen Ergebnisse (Tabelle I) mit den berechneten (Tabelle II) vergleicht, können folgende Feststellungen gemacht werden :

— Für die Legierungen mit 36% und 46% Ni nähern sich jene Werte am meisten den berechneten, die durch die Behandlung der Art 2) erhalten wurden, während für die Legierung mit 54% Ni dies durch eine Wärmebehandlung der Art 4) und für die Legierung mit 79% durch die Wärmebehandlung der Art 1) bewirkt wird.

Je größer der Wert des Verhältnisses $H_{c\tau}/H_{cK}$ ist, umso ausgeprägter ist die Verminderung der remanenten Spannungen.

— In dieser Hinsicht bewirken die Behandlungen der Art 3) (für die Legierungen mit 46% und 79% Ni) und der Art 4) (für die Legierungen mit 36% und 54% Ni) eine beteutende Herabsetzung der elastsichen Spannungen.

Schlussfolgerung

Es kann gesagt werden, daß eine gute Übereinstimmung zwischen den, mit Hilfe des vorgeschlagenen Modells und jenen, auf experimentellem Weg erhaltenen Ergebnissen herrscht. Diese Tatsache spricht dafür, dass Wärmebehandlungen von der Art, welche in der vorliegenden Arbeit verwendet wurden, tatsächlich eine bedeutende Verminderung der remanenten elastischen Spannungen in ferromagnetischen Fe-Ni-Drähten mit verschiedenem Komponentenverhältnis zur Folge haben.

LITERATURANGABE

1 De Sabata, C.: Dissertationsarbeit, Jassy, 1966.
2 Lloyd, L. C., Smith, R. S.: Canad. Journ. of Phys. *40*, S. 454, (1962).
3 Bobeck, A. H.: J. Appl. Phys., *29*, Nr. 3, (1958).
4 Bobeck, A. H., Fischer, R. F.: J. Appl. Phys., Suppl. zu Band *30*, Nr. 4, (1959).
5 Kraizmer, L. P.: Bîstrodeistvuişcie feromagnitnîie zapominaiuşcie ustroistva, „Energia", Moskau-Leningrad (UdSSR) S. 236, (1964).
6 Cedighian, S.: Materiale magnetice, Ed. Tehn. Bucureşti, 1967.
7 Cedighian, S.: Ferite, Ed. Tehn. Bucureşti, S. 376, 1966.
8 Kneller, E.: Ferromagnetismus, Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg, S. 252, 1962.
9 Kneller, E.: Ferromagnetismus, Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg, S. 193, 1962.

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ŞI TEORETICE ASUPRA VARIAŢEI CÎMPULUI MAGNETIC COERCITIV LA REDUCEREA TENSIUNILOR INTERNE A ALIAJELOR Fe-Ni

REZUMAT

Se studiază influenţa tratamentului termic asupra variaţiei unor proprietăţi magnetice la fire de aliaje Fe-Ni, cu compoziţii diferite.

Ţinînd cont de energia liberă a unui monodomeniu cu structura policristalină cu tensiuni şi fără tensiuni interne, obţinem pentru raportul cîmpului coercitiv valori, în bună concordanţă cu cele calculate teoretic.

Se confirmă astfel reducerea tensiunilor interne în firele feromagnetice, studiate sub influenţa unor anumite tratamente termice.

ОПЫТНЫЕ Е ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ КОЭРЦИТИВНОГО ПОЛЯ ПРИ УМЕНЬШЕНИИ ВНУТРЕННИХ НАПРЯЖЕНИЙ У ФЕРРОНИКЕЛЕВЫХ СПЛАВОВ.

(РЕЗЮМЕ)

Рассматривается влияние термической обработки на изменение некоторых магнитных свойств нитей из различных ферроникелевых сплавов.

Учитывая свободную энергию области поликристаллического строения с внутренними напряжениями и без них, получаются для отношения коэрцитивного поля значения совпадающие с теоретическими данными.

Подтверждается таким образом уменьшение внутренних напряжений ферромагнитных нитях под влиянием определенных термических обработок.

O NOUĂ METODĂ DE STUDIU A SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE LINIARE CU UN GRAD DE LIBERTATE ȘI O CUPLĂ PERCUTANTĂ

DE

GH. SILAȘ

În majoritatea lucrărilor, mișcările periodice ale unor sisteme vibropercutante particulare și stabilitatea lor se determină prin metoda ajustării. Pe această cale s-au făcut primele studii de Rusakov U.G. și Harkevici A.A. [1], iar apoi de către Barkan D.D. [2]. Tot prin această metodă mișcările periodice stabile ale unor sisteme cu un grad de libertate au fost studiate de Kobrinski A.E. [4], Ragulskene V.L. [5] și alții [3].

Un alt mod de studiu al mișcării sistemelor vibropercutante se bazează pe teoria transformărilor punctuale dezvoltată de Andronov A.A. [7].

Într-o serie de lucrări inițiate de Bespalova L.V. [8], Feighin M.I. [9] și alții, stabilitatea mișcărilor periodice se determină din comportarea sistemului în vecinătatea punctului fix al transformării adică pentru variații mici ale parametrilor mișcării. Pentru studiul stabilității, Bautin M.N. [10], și alții, folosesc teorema lui Koenigs și diagrama Lamer [7].

Alte metode de studiu care se bazează pe folosirea calculului operațional, al seriilor Fourier, etc., se aplică în mică măsură la sistemele vibropercutante, deoarece nu sînt potrivite studiului stabilității. Acestea prezintă avantaj numai atunci cînd se poate presupune că ciocnirile acționează periodic. În acest caz ciocnirile se pot înlocui printr-o succesiune de impulsuri aplicate periodic sistemului.

Studiile existente privind sistemele vibropercutante liniare cu un singur grad de libertate și o cuplă percutantă conțin numai cazul excitațiilor armonice. Însă așa cum arată Kowalczyk B. [6], pînă în prezent nici pentru astfel de sisteme nu există un studiu complet și general, iar unele din rezultatele obținute nu sînt corecte.

Pentru a face un studiu complet și general al mișcărilor sistemelor vibropercutante liniare cu un grad de libertate, în continuare se va prezenta o metodă bazată pe scrierea directă a soluției și pe folosirea proprietăților de periodicitate ale forței de excitație care se va exprima în general printr-o funcție presupusă cunoscută. Folosind numerele complexe unele rezultate se pot obține și se pot scrie sub forme foarte simple. Cu această metodă au fost studiate anterior regimurile periodice stabile de mișcare ale unei mase libere cu excitație periodică [11].

1. Studiul mișcării sistemului vibropercutant

Se consideră sistemul mecanic format din masa m, fixată de arcurile cu constanta elastică k, în prezența unei amortizări vîscoase cu coeficientul c (fig. 1). Asupra masei m acționează forța perturbatoare $Q(t)$ care se exprimă analitic printr-o funcție periodică de timp avînd pulsația armonicii fundamentale ω deci perioada $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Prin urmare $Q(t)$ satisface condiția de periodicitate:

$$Q(t+T)=Q(t) \tag{1}$$

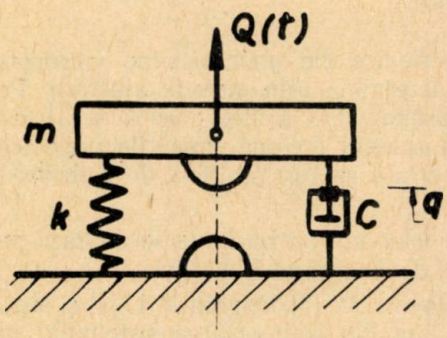


Fig. 1.

În timpul mișcării, masa m, se ciocnește de un reper fix. Dacă poziția masei m se determină prin coordonata q, atunci sistemul va fi supus la legătura unilaterală

$$q+q_0\geqslant 0 \tag{2}$$

q_0 fiind distanța de la reperul fix la originea de măsurare a coordonatei q.

Ecuația diferențială a mișcării între două ciocniri este:

$$m\ddot{q}+c\dot{q}+kq=Q(t)$$

Soluția generală a acestei ecuații diferențiale în intervalul (t_k, t_{k+1}) dintre ciocnirile de ordinul k și $k+1$, se poate scrie

$$q=e^{-\frac{c}{2m}(t-t_k)}[X_1\cos p(t-t_k)+X_2\sin p(t-t_k)]+$$
$$+\frac{1}{mp}\int_{t_k}^{t}Q(\tau)e^{-\frac{c}{2m}(t-\tau)}\sin p(t-\tau)\,d\tau \tag{4}$$

unde X_1, X_2, sînt constante de integrare, iar $p=\sqrt{\omega_n^2-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}$; $\left(\omega_n^2=\frac{k}{m}\right)$. Aici s-a presupus amortizarea astfel încît $c<c_{cr}$. Din soluția (4) se mai obține

$$\dot{q}+\frac{c}{2m}q=pe^{-\frac{c}{2m}(t-t_k)}[-X_1\sin p(t-t_k)+X_2\cos p(t-t_k)]+$$
$$+\frac{1}{m}\int_{t_k}^{t}Q(\tau)e^{-\frac{2}{2m}(t-\tau)}\cos p(t-\tau)\,d\tau \tag{5}$$

Condițiile inițiale ale mișcării în intervalul considerat sînt

$$q(t_k) = -q_0 \; ; \quad \dot{q}(t_k) = \dot{q}'_k = -R\dot{q}_k \tag{6}$$

$\dot{q}_k$ fiind viteza la începutul ciocnirii de ordinul k iar $\dot{q}'_k$ la sfîrșitul aceleași ciocniri.

Cu ajutorul acestor condiții, pentru constantele de integrare rezultă valorile

$$X_1 = -q_0 \; ; \qquad X_2 = -\frac{1}{p}\left(\frac{c}{2m}q_0 + R\dot{q}_k\right) \tag{7}$$

Sfîrșitul intervalului coincide cu începutul ciocnirii de ordinul $k+1$, deci condițiile finale vor fi

$$q(t_{k+1}) = -q_0 \; ; \qquad \dot{q}(t_{k+1}) = \dot{q}_{k+1} \tag{8}$$

Introducînd aceste condiții în relațiile (4) și (5) după ce s-au înlocuit valorile constantelor de integrare, se obține

$$q_0 = e^{-\frac{c}{2m}(t_{k+1}-t_k)}\left[q_0 \cos p(t_{k+1}-t_k) + \frac{1}{p}\left(\frac{c}{2m}q_0 + R\dot{q}_k\right)\sin p(t_{k+1}-t_k)\right] -$$

$$-\frac{1}{mp}\int_{t_k}^{t_{k+1}} Q(\tau)\, e^{-\frac{c}{2m}(t_{k+1}-\tau)} \sin p(t_{k+1}-\tau)\,d\tau$$

$$\dot{q}_{k+1} - \frac{c}{2m}q_0 = e^{-\frac{c}{2m}(t_{k+1}-t_k)}\left[pq_0 \sin p(t_{k+1}-t_k) - \right. \tag{9}$$

$$\left.\left(\frac{c}{2m}q_0 + R\dot{q}_k\right)\cos p(t_{k+1}-t_k)\right] + \frac{1}{m}\int_{t_k}^{t_{k+1}} Q(\tau)e^{-\frac{c}{2m}(t_{k+1}-\tau)} \cos p(t_{k+1}-\tau)\,d\tau\,.$$

Aceste relații pot fi scrise mai concentrat folosind numerele complexe. Astfel dacă se consideră numărul complex $w = \frac{c}{2m} + ip$ ($i = \sqrt{-1}$ fiind simbolul imaginar) și conjugatul său $\overline{w}$, ecuațiile (7) se vor scrie

$$\psi(\dot{q}_{k+1}, \dot{q}_k, t_{k+1}, t_k) = \dot{q}_{k+1} - wq_0 + (R\dot{q}_k + wq_0)e^{-\overline{w}(t_{k+1}-t_k)} +$$

$$+ \frac{1}{m}\int_{t_k}^{t_{k+1}} Q(\tau)\, e^{-\overline{w}(t_{k+1}-\tau)}\,d\tau = 0 \tag{10}$$

Această ecuație determină elementele ciocnirilor succesive din timpul mișcării, fiind echivalentă cu două relații scalare. Ecuația (10) este fundamentală atît pentru studiul mișcărilor periodice, cît și al stabilității lor.

2. Determinarea mișcărilor periodice

Ecuațiile generale (9) sau (10) obținute anterior se pot folosi la determinarea mișcărilor periodice staționare ale sistemului. Pentru ca să existe mișcări periodice este necesar să fie îndeplinite condițiile:

a) Viteza la începutul fiecărei ciocniri trebuie să fie aceeași, adică

$$\dot{q}_k = \dot{q}_{k+1} = \dot{q}_c \tag{11}$$

b) Intervalul între două ciocniri succesive trebuie să fie un multiplu al perioadei τ a forței de excitație, deci

$$t_{k+1} - t_k = rT\,;\ (r = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{12}$$

Înlocuind condițiile (11) și (12) în ecuația (10) se obține ecuația cu ajutorul căreia se determină mișcările periodice ale sistemului:

$$\bar{\psi} = \psi(\dot{q}_c,\ \dot{q}_c,\ t_k + rT,\ t_k) = 0 \tag{13}$$

Din această ecuație complexă, echivalentă cu două ecuații algebrice, se determină parametrii mișcării periodice $\dot{q}_c$ și t_k.

Pentru ca să existe mișcări periodice este necesar ca cele două ecuații algebrice (13) să aibă soluții reale. De asemenea mai trebuie ca în tot intervalul legea mișcării determinată să verifice legătura unilaterală (2).

3. Stabilitatea mișcărilor periodice

Mișcările periodice se realizează efectiv numai dacă sînt satisfăcute și condițiile de stabilitate. Pentru determinarea acestor condiții trebuie considerate mișcările perturbate. Astfel se va presupune că datorită unor perturbații inițiale, viteza $\dot{q}_k$ de la începutul unei ciocniri și momentul t_k al ciocnirii diferă puțin de valorile calculate pentru regimul periodic de mișcare.

Condițiile de stabilitate se pot obține mai simplu și mai ușor din ecuația complexă de recurență (8) în care $\dot{q}_k$ și t_k se înlocuiesc prin $\dot{q}_c + \Delta\dot{q}_k$ și $t_k + \Delta t_k$ ($k = 1,\ 2,\ \ldots$). După liniarizare în raport cu perturbațiile a ecuației obținute rezultă

$$\Delta_k\bar{\psi} = \left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\dot{q}_{k+1}}\right)_c \Delta\dot{q}_{k+1} + \left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\dot{q}_k}\right)_c \Delta\dot{q}_k + \left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t_{k+1}}\right)_c \Delta t_{k+1} + \left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t_k}\right)_c \cdot \Delta t_k = 0 \tag{14}$$

Ținînd seama de ecuațiile (10) și (13) ecuația (14) se mai poate scrie

$$\Delta_k\bar{\psi} = \Delta\dot{q}_{k+1} + Re^{-\bar{w}rT}\Delta\dot{q}_k - \left[\frac{Q(t_k) + kq_0}{m} - \bar{w}\dot{q}_c\right]\Delta t_{k+1} + \\ + \left[\frac{Q(t_k) + kq_0}{m} + R\bar{w}\dot{q}_c\right] e^{-\bar{w}rT}\,\Delta t_k = 0 \tag{15}$$

Din această ecuație complexă se obține un sistem liniar și omogen în perturbații pentru care soluțiile se iau de forma

$$\Delta\dot{q}_k = v\beta^k\,;\ \Delta t_k = \theta\beta^k\,;\ (k = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{16}$$

Se obține astfel un sistem liniar și omogen de două ecuații cu necunoscutele v și θ. Pentru a avea soluții diferite de zero trebuie ca determinantul sistemului să fie nul. Astfel rezultă ecuația caracteristică de gradul doi în β a sistemului vibropercutant:

$$\beta^2 + \left\{2R\cos(prT) - \frac{(1+R)\,[Q(t_k)+kq_0]}{mpq_c}\sin(prT)\right\}e^{-\frac{c}{m}rT}\beta + R^2e^{-\frac{c}{m}rT} = 0 \tag{17}$$

Mișcarea periodică va fi stabilă dacă rădăcinile acestei ecuații sînt în modul subunitare.

Condițiile necesare și suficiente pentru ca rădăcinile ecuației caracteristice (17) să fie subunitare se obține folosind criteriul lui Schur [4]. Una dintre condiții este

$$R < e^{\frac{c}{2m}rT} \tag{18}$$

Pentru ciocnirile reale, în care $R<1$, această condiție este întotdeauna verificată deoarece $e^{\frac{c}{2m}rT} > 1$. Dacă se consideră ciocnirea perfect elastică, deci $R=1$, condiția este îndeplinită numai pentru sistemele cu amortizare ($c\neq 0$).

Presupunînd verificată condiția (18), pentru ca ecuația (17) să aibă rădăcini în modul subunitare, mai este necesar să fie verificate inegalitățile următoare:

$$-(1+R^2e^{-\frac{c}{m}rT}) < \left\{2R\cos(prT) - \frac{(1+R)[Q(t_k)+kq_0]}{mpq_c}\sin(prT)\right\}e^{-\frac{c}{2m}rT} < 1 + R^2e^{-\frac{c}{m}rT} \tag{19}$$

Pentru ciocnirile reale ($R<1$) aceste inegalități reprezintă condițiile de stabilitate a mișcărilor periodice cu ciocniri ale sistemului vibropercutant.

4. **Analiza mișcărilor periodice ale sistemului vibropercutant pentru cazul coeficientului de restituire nul** ($R=0$).

După cum s-a arătat anterior [12] cînd coeficientul de restituire la ciocnire este nul ($R=0$) mișcările periodice pot fi fără sau cu opriri de durată finită pe limitator.

Pentru a arăta cazurile posibile, conform metodei dată în lucrarea (12) este necesar să se considere legătura unilaterală (2). Deoarece $R=0$, în toate cazurile posibile se obține

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_1 = (\dot{q})_1 = \dot{q}'_c = -R\dot{q}_c = 0$$

Indicele 1 arată că e vorba de valori din momentul final al ciocnirii.

În continuare trebuie determinat semnul derivatelor următoare. Prima dintre acestea, ținînd seama de ecuația diferențială a mișcării, va fi

$$\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_1 = (\ddot{q})_1 = \ddot{q}'_c = \frac{Q(t_k)+kq_0}{m} \tag{20}$$

Discuția cazurilor posibile se bazează pe analiza semnului mărimii $Q(t_k)+kq_0$. Într-adevăr, pentru $Q(t_k)>-kq_0$, rezultă

$$\ddot{q}'_c = \left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_1 = -\frac{Q(t_k)+kq_0}{m} > 0 \tag{21}$$

ceea ce înseamnă că între masă și limitator contactul este instantaneu. În acest caz studiul mișcărilor periodice și a stabilității acestora se face ca și pentru $R\neq 0$, cu ajutorul ecuațiilor (13) respectiv (15) unde se va lua $R=0$.

Presupunînd $Q(t_k)=-kq_0$, precum și $\dot{Q}(t_k)>0$, se obține

$$\ddot{q}'_c = \left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_1 = 0\,; \quad \dddot{q}'_c = \left(\frac{d^3f}{dt^3}\right)_1 = +\dot{Q}(t_k)>0 \tag{21'}$$

iar contactul este de asemenea instantaneu. Același lucru se întîmplă și dacă $\dot{Q}(t_k)=0$, dar în șirul derivatelor de ordin superior al lui $Q(t)$ pentru $t=t_k$ prima derivată diferită de zero este pozitivă. În caz contrar contactul nu mai este instantaneu.

În sfîrșit dacă $Q(t_k)<-kq_0$ masa rămîne un timp finit pe limitator. Pe durata contactului este valabilă ecuația

$$-kq_0=Q(t)+\lambda \tag{22}$$

unde multiplicatorul λ al legăturii este pozitiv. Prin urmare, în timpul contactului dintre masă și limitator se obține condiția

$$\lambda=-[Q(t)+kq_0]\geqslant 0 \tag{23}$$

Desprinderea masei m de limitator poate avea loc pentru un moment $t=\tau_k$ cînd λ devine nul, adică

$$Q(\tau_k)=-kq_0 \qquad (t_k<\tau_k\leqslant t_{k+1}) \tag{24}$$

Momentele ciocnirilor sînt cuprinse între valorile algebrice τ_k determinate din această ecuație.

Folosind notația (10) mișcările periodice ale acestui sistem vibropercutant cu ciocniri și contact neinstantaneu, se determină din ecuația

$$[\psi(\dot{q}_c,\dot{q}_c,t_{k+1},\tau_k)]_{R=0} = 0 \tag{25}$$

Se poate ușor observa că în acest caz mișcarea perturbată coincide cu mișcarea periodică, de unde rezultă că aceste mișcări periodice sînt întotdeauna stabile.

În particular, pentru $\dot{q}_c = 0$ mișcarea se face fără ciocniri și cu contact neinstantaneu. Toate rezultatele obținute anterior pot fi aplicate și în acest caz prin particularizare. Aceste mișcări periodice fără ciocniri se vor determina din ecuația complexă :

$$\psi(0,0,t_{k+1},\tau_k) = 0 \tag{26}$$

τ_k obținîndu-se prin rezolvarea ecuației (24).

5. Generalizarea rezultatelor la alte cazuri de sisteme vibropercutante.

Există multe sisteme vibropercutante al căror studiu se poate face folosind un model cu un singur grad de libertate și o cuplă percutantă. Toate aceste sisteme sînt caracterizate prin ecuații diferențiale de forma (3) precum și de legătura unilaterală (2).

Studiul prezentat anterior se referă la cazul $c < c_{cr}$, cînd mișcarea proprie ce se efectuează în lipsa excitării și a legăturii unilaterale este vibratorie. Totuși există sisteme vibropercutante pentru care mișcarea proprie este de altă natură. Astfel, de exemplu, este sistemul format dintr-o masă fără legături elastice (fig. 2) sau sistemele mecanice obligate să se rotească într-un plan vertical (fig. 3) precum și cazul sistemului mecanic din fig. 1 cu diferite amortizări pentru care $c \geqslant c_{cr}$.

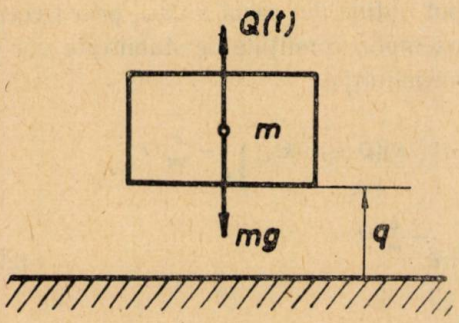


Fig. 2.

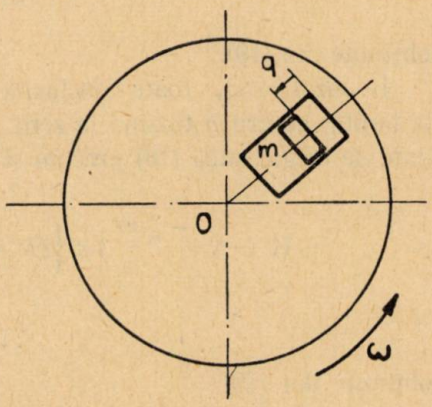


Fig. 3.

Oricare sistem vibropercutant cu un singur grad de libertate și o cuplă percutantă poate fi studiat folosind modelul din fig. 1. Se va ține însă seama de raportul dintre coeficientul de amortizare c și valoarea lui critică c_{cr}. Cazul $c < c_{cr}$ a fost studiat complet mai înainte. Celelalte cazuri se pot trata în mod analog folosind numere hipercomplexe.

Ecuația diferențială (3) este valabilă pentru oricare sistem vibropercutant cu o cuplă percutantă, indiferent de valoarea raportului $\frac{c}{c_{cr}}$. Soluția generală a acestei ecuații depinde de natura rădăcinilor ecuației ei caracteristice, deci

de raportul $\frac{c}{c_{cr}}$, dar formal soluțiile se scriu la fel în toate cazurile. Prin urmare formal toate rezultatele obținute pentru primul caz ($c<c_{cr}$) pot fi transpuse direct și pentru celelalte cazuri $c\geqslant c_{cr}$.

Pentru concretizare și simplificare vom nota în toate cazurile posibile de sisteme vibropercutante

$$p^2=\left|\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}\right| \tag{27}$$

Ținînd seama de cele de mai sus prin înlocuirea valorii p din relațiile stabilite pentru $c<c_{cr}$, prin *ip*, se obțin concluzii valabile pentru cazul $c>c_{cr}$. Astfel condițiile de stabilitate a mișcărilor periodice, în acest caz, sînt date de inegalitatea (18) precum și de inegalitățile

$$-(1+R^2e^{-\frac{c}{m}rT})<\left\{2Rch(prT)-\frac{(1+R)[Q(t_k)+kq_0]}{mp\dot{q}_c}sh(prT)\right\}e^{-\frac{c}{2m}rT}<$$

$$<1+R^2e^{-\frac{c}{m}rT} \tag{28}$$

obținute din (19).

În cazul $c=c_{cr}$ toate concluziile se pot obține din cazul $c<c_{cr}$ prin trecere la limită, pentru p tinzînd la zero. De exemplu, condițiile de stabilitate vor fi date de inegalitatea (18) precum și de inegalitățile

$$-(1+R^2e^{-\frac{c}{m}rT})<\left\{2R-\frac{r\tau(1+R)[Q(t_k)+kq_0]}{m\dot{q}_c}\right\}e^{-\frac{c}{2m}rT}<$$

$$<1+R^2e^{-\frac{c}{m}rT} \tag{29}$$

obținute din (19).

Se constată astfel că nu numai metoda de studiu este aceeași pentru toate cazurile, dar și rezultatele se scriu formal la fel și se pot transpune direct și imediat de la un caz la altul.

BIBLIOGRAFIE

1. RUSAKOV U. G., HARKEVICI A. A.: Vînujdennîe kolebaniia sistemî, udariaiușceisia ob ograniciteli. Jurnal tehniceskoi fiziki, t XII, vîp 11—12, 1942.
2. BARKAN D. D.: Vibrometod v stroitelstve. Gosstroizdat, Moskva, 1959.

3. SILAŞ GH., BRÎNDEU L.: Regimurile periodice staţionare ale mecanismelor vibropercutante cu amortizare vîscoasă avînd un grad de libertate. Bul. Şt. şi Tehnic al I. P. Timişoara (serie nouă) tom. 11 (25), fasc. 2, 1966.

4. KOBRINSKI A. E.: Mehanizmî s uprughimi sviaziami. Izd. „Nauka" Moskva, 1964.

5. RAGULSKIS K. M., VITKUS I. I., RAGULSKENE V. L.: Samosinhronizaţia mehaniceskih sistem.
1. Samosinhronîe i vibroudarnîe sistemî (Ragulskene V. L.: Vibroudarnîe sistemî). Izd. Mintis, Vilnius, 1965.

6. KOWALCZYK B.: Badanie stabilnosci strukturalnej ukladu wibro-uderzeniowego o jdnym stopniu swobody. Zeszyty naukove Politechniki Gdanskiej. Mehanika IX, Nr. 112, 1967.

7. ANDRONOV A. A., VITT A. A., HAIKIN S. E.: Teoria kolebanii, G. I.F.M.L. Moskova, 1959.

8. BESPALOVA L. V.: K teorii vibroudarnogo mehanizma. Izvestia AN SSSR, OTN Nr. 5, 1957.

9. FEIGHIN M. I.: K issledovaniu vînujdennîh kolebanii sistem s suhim treniem. Dinamika maşin, Sb. statei, Izd. Maşinostroenie, Moskva, 1966.

10. BATIN N. N.: Dinamiceskaia modeli ciasovogo koda bez sobstvennogo perioda. Injenernîi Sbornik, t. XVI, 1953.

11. SILAŞ GH., BRÎNDEU L., HEGEDÜS A.: Studiul mişcărilor vibropercutante ale unei mase libere cu excitaţie periodică. Studii şi cercetări de Mecanică aplicată, t. 29, Nr. 5, 1970.

12. SILAŞ GH., BRÎNDEU L.: Behandlung periodischer Bewegungem von Rüttelsystemen mit den Lagrangeschen Gleichungen. VDI Berichte, Nr. 135, 1969.

EIN NEUES VERFAHREN ZUM STUDIUM LINEARER STOSS-SCHWINGSYSTEME MIT EINEM FREIHEITSGRAD UND EINEM STOSSPAAR

(ZUSAMMENFASSUNG)

In Betracht kommt ein Stossschwingsystem mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung mit einem Freiheitsgrad und mit einem Stosspaar, welches durch eine periodische Kraft erregt ist.

Es wird ein Verfahren zum Studium der Bewegungen dargestellt, welche auf das Schreiben der Lösung in Integral-Form und auf die Benützung der Periodizitäts-Eigenschaften der Erregerkraft, die allgemein durch eine bekannte Funktion ausgedrückt ist, beruht. Zum Studium der Bewegungen erhält man die in komplexer Form geschriebene Gleichung (10). Mit dieser Gleichung werden für alle möglichen Fälle die periodischen Bewegungen und deren Stabilität bestimmt.

НОВЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ВИБРОУДАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ И С УДАРНОЙ СВЯЗЬЮ

(РЕЗЮМЕ)

Приводится виброударная система с вязким затуханием обладающая одной степенью свободы и периодической возбуждающей силой.

Рассматривается метод анализа движений, основанный на записи решения в интегральной форме. Возбуждающая сила выражается известной фукцией и основывается на применении периодических свойств этой функции. Для исследования возможных движений получается уравнение (10) в комплексной форме. Применяя это уравнение устанавливаются периодические движения и их устоичивость во всех возможных случаях.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL REGIMURILOR STAȚIONARE ALE UNUI SISTEM MECANIC CU EXCITAȚIE INERȚIALĂ ACȚIONAT DE UN MOTOR ELECTRIC

DE

GH. SILAȘ, I. GROȘANU, N. BOGOEVICI

Sistemele mecanice concrete sînt acționate de motoare electrice cu puterea limitată, a căror funcționare este dependentă de mișcarea sistemului acționat. Din acest motiv presupunerea unor rotații cu viteză unghiulară constantă este o idealizare a sistemelor concrete, care poate fi admisă numai în cazul cînd puterea motorului de acționare este practic nelimitată. Pentru a evidenția procesele dinamice care apar la interacțiunea sursei cu sistemul acționat, în lucrările [5], [6], [9] sînt folosite caracteristicile statice ale motoarelor de curent alternativ la analiza regimurilor staționare. Deoarece vitezele unghiulare nu rămîn riguros constante, pentru studiul mai exact al regimurilor staționare trebuie considerate caracteristicile dinamice ale motoarelor de acționare. În lucrările [2], [5], [12] s-au analizat regimurile staționare și nestaționare ale unui sistem mecanic inerțial format din una sau două mase în mișcare de translație, acționat cu un motor electric continuu avînd excitația în paralel. Aici se consideră un sistem mecanic mai general acționat cu motoare electrice de curent continuu avînd excitația în serie sau în paralel.

1. Fie un sistem mecanic format din „n" mase în mișcare de translație avînd modelul mecanic din fig. 1. Sistemul conține un singur generator inerțial de vibrație care este acționat printr-o legătură rigidă de un motor electric de curent continuu. Legăturile elastice ale sistemului se presupun liniare și amortizările de natură vîscoasă. Deplasările maselor avînd translații rectilinii sînt raportate la poziția statică de echilibru a sistemului. Ecuațiile mișcărilor de translație ale sistemului sînt:

$$\sum_{j=1}^{n} (m_{ij}\ddot{x}_j + c_{ij}\dot{x}_j + k_{ij}x_j) = \delta_1^i F(t), \qquad (i=1,2,..,n) \tag{1.1}$$

unde δ_1^i reprezintă simbolul lui Kronecker.

Admițînd că generatorul inerțial de vibrații are masa neechilibrată m și excentricitatea constantă e_0 forța perturbatoare $F(t)$ este dată de

$$F(t)=m_0e_0\ (\ddot{\varphi}\sin\varphi+\dot{\varphi}_0^2\cos\varphi) \tag{1.2}$$

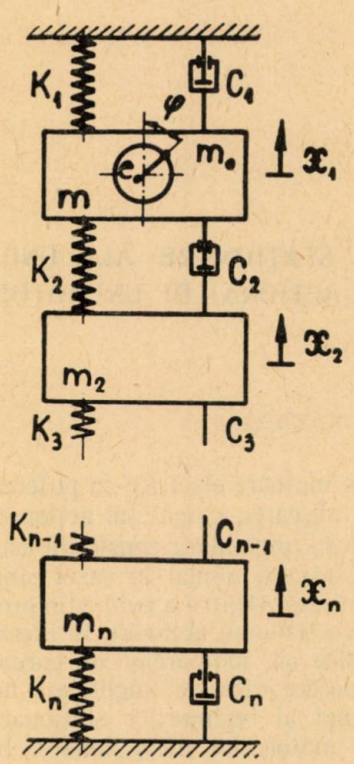


Fig. 1.

Coeficienții constanți ai sistemului (1.1) se determină cu relațiile:

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 E_c}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j}, \qquad c_{ij} = \frac{\partial^2 E_d}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j}, \qquad k_{ij} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial x_i \partial x_j} \tag{3}$$

unde E_c este energia cinetică corespunzătoare translațiilor, E_d funcția de disipare în aceste mișcări și E_p energia potențială corespunzătoare deformațiilor elastice.

Considerînd masa neechilibrată m_0 legată rigid de rotorul motorului electric, ecuația de mișcare a maselor în rotație este

$$J\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} = m_0 e_0 (\ddot{x}_1 + g) \sin\varphi + M(i)$$

unde J este momentul de inerție în raport cu axa de rotație și $M(i)$ momentul cuplului dezvoltat de motorul electric.

Momentul $M(i)$ este liniar pentru motoare de curent continuu cu excitația în paralel și parabolic pentru motoare cu excitația în serie.

Pentru motoarele electrice de curent continuu, avînd schemele din fig. 2 sau fig. 3, la studiul regimurilor staționare se folosește ecuația:

$$\frac{di}{dt} + \alpha_1 i = \alpha_2 - \alpha_3 \dot{\varphi} \tag{1.5}$$

unde

$$\alpha_1 = \frac{R}{L_i}, \quad i = \frac{i_i}{I_m}, \quad \alpha_2 = \frac{u_b}{L_i I_m}, \quad \alpha_3 = \frac{C_M}{L_i I_m} \tag{1.6}$$

C_M fiind o constantă specifică motorului de acționare iar $R = R_1 + R_c + R_i$ în cazul motoarelor cu excitația în paralel și $R = R_2 + R_c + R_e + R_i$ pentru motoarele cu excitația în serie.

Pentru studiul regimurilor staționare periodice se folosesc notațiile:

$$\tau = \Omega_{11} t, \quad \mu_0 = \frac{m_0}{m_{11}}, \quad \mu_0 e_0 y_i = x_i, \quad m_{ij} = \mu_{ij} m_{11}, \quad c_{ij} = 2N_{ij} m_{11}$$

$$k_{ij} = \Omega_{ij}^2 m_{11}, \quad \zeta_{ij} = N_{ij}/\Omega_{11}, \quad \xi_{ij}^2 = \Omega_{ij}^2/\Omega_{11}^2, \quad \nu = \varepsilon\bar{\nu} = \frac{m_0 e_0^2 \mu}{J}$$

$$\delta = \varepsilon\bar{\delta} = \frac{m_0 e_0 g}{J\Omega_{11}^2}, \quad \alpha_1 = \frac{R}{L_i \Omega_{11}}, \quad i = \frac{i_i}{I_m}, \quad \alpha_2 = \frac{u_b}{L_i I_m \Omega_{11}}, \quad \alpha_3 = \frac{C_M}{L_i I_m} \tag{1.7}$$

$$\Omega = \frac{d\varphi}{d\tau}, \quad y' = \frac{dy}{d\varphi}, \quad 2D = 2\varepsilon\bar{D} = \frac{C}{J\Omega_{11}}, \quad M_1 = \varepsilon\bar{M}_1 = \frac{M_M}{J\Omega_{11}^2}$$

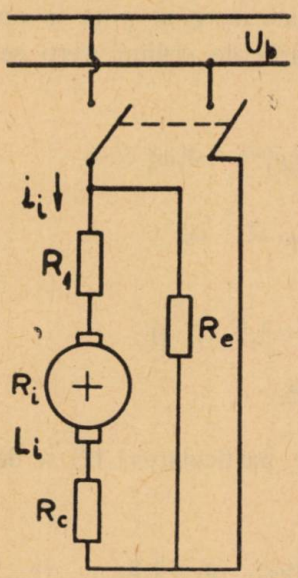


Fig. 2.

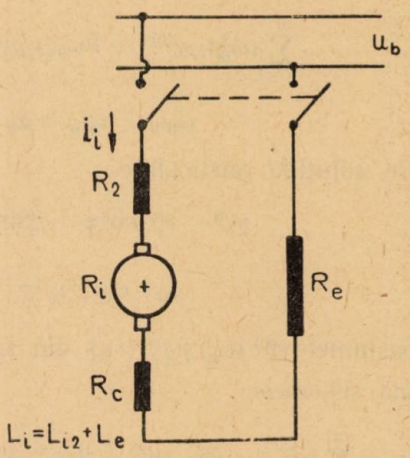


Fig. 3.

ε fiind un parametru mic. Ținînd seama de notațiile (1.7), pentru studiu regimurilor staționare se obțin ecuațiile:

$$\sum_{j=1}^{n}(\mu_{ij}\Omega^2 y_j'' + 2\zeta_{ij}\Omega y_j' + \xi_{ij}^2 y_j) = \delta_1' f(\Omega,\Omega',\varphi)$$

$$\Omega\Omega' = \varepsilon(\bar{\nu}\Omega^2 y_1'' + \bar{\delta})\sin\varphi - \varepsilon\bar{D}\Omega + \varepsilon\bar{M}_1(i) \tag{1.8}$$

$$\Omega i' + \alpha_1 i = \alpha_2 - \alpha_3\Omega$$

unde funcția perturbatoare $f(\Omega,\Omega',\varphi)$ este

$$f(\Omega,\Omega',\varphi) = \Omega\Omega'\sin\varphi + \Omega^2\cos\varphi \tag{1.9}$$

Se caută regimuri staționare periodice apropiate de regimurile staționare pe care le-ar avea sistemul în cazul unui rotații uniforme a masei neechilibrate m_0. Aceste regimuri se determină aproximativ, punînd

$$y_j = \bar{y}_j(\varphi,\varepsilon) = y_j^{(0)} + \varepsilon y_j^{(1)}(\varphi) + 0(\varepsilon^2)$$

$$\Omega = \bar{\Omega}(\varphi,\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\Omega_1(\varphi) + 0(\varepsilon^2) \tag{1.10}$$

$$i = \bar{i}(\varphi,\varepsilon) = i_0 + \varepsilon i_1(\varphi) + 0(\varepsilon^2)$$

Regimurile staționare periodice se determină mergînd pînă la aproximația de ordinul întîi. Astfel, pentru aproximația de ordinul zero se găsește sistemul

$$\sum_{j=1}^{n} (\omega_0^2 \mu_{ij} y_j^{(0)\prime\prime} + 2\omega_0 \zeta_{ij} y_j^{(0)\prime} + \xi_{ij}^2 y_j^{(0)}) = \delta_1^i \omega_0^2 \cos\varphi$$

$$\omega_0 i_0' + \alpha_1 i_0 = \alpha_2 - \alpha_3 \omega_0, \; \Omega = \omega_0 \tag{1.11}$$

care are soluțiile particulare:

$$y_j^{(0)} = e_j^{(0)} \cos\varphi + f_j^0 \sin\varphi, \quad (j = 1,2,\ldots, n)$$

$$\varphi_0 = \omega_0 \tau, \; i_0 = \frac{\alpha_2 - \alpha_3 \omega_0}{\alpha_1} \tag{1.12}$$

Constantele $e_j^{(0)}(\omega_0)$ și $f_j^{(0)}(\omega_0)$ din soluțiile particulare (1.12) se determină rezolvînd sistemele:

$$\sum_{j=1}^{n} [(\xi_{ij}^2 - \omega_0^2 \mu_{ij}) e_j^{(0)} + 2\omega_0 \zeta_{ij} f_j^{(0)}] = \delta_1^i \omega_0^2, \quad (i = 1,2,\ldots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} [-2\omega_0 \zeta_{ij} e_j^{(0)} + (\zeta_{ij}^2 - \omega_0^2 \mu_{ij}) f_j^{(0)}] = 0 \tag{1.13}$$

Soluțiile (1.12) fiimd determinate, pentru aproximația de ordinul întîi se găsește sistemul:

$$\sum_{j=1}^{n} [\omega_0^2 \mu_{ij} y_j^{(1)\prime\prime} + 2\omega_0 \zeta_{ij} y_j^{(1)\prime} + \xi_{ij}^2 y_j^{(1)}] = f_j^{(1)}(\Omega_1, \varphi) \quad (i = 1,2,\ldots, n)$$

$$\omega_0 \Omega_1' = (\nu\omega_0^2 y_1^{(0)\prime} + \overline{\delta}) \sin\varphi - \overline{D}\omega_0 + M_1(i_0) \tag{1.14}$$

$$i_1' + x_1 i_1 = -\alpha_3 \Omega_1$$

unde

$$f_i^{(1)} = \delta_i^i \omega_0 (\Omega_1' \sin\varphi + 2\Omega_1 \cos\varphi) - 2\omega_0 \mu_{ij} \Omega_1 y_j^{(0)\prime\prime} - 2\zeta_{ij} \Omega_1 y_j^{(0)\prime} \tag{1.15}$$

Se caută soluții periodice în raport cu unghiul φ cu perioada 2π. Pentru aceasta doua din ecuațiile sistemului (1.14) nu trebuie să conțină termeni liberi, deci urmează să fie îndeplinită condiția

$$-\frac{\nu\omega_0^2}{2} f_1^{(0)}(\omega_0) - D\omega_0 + M_1(i_0) = 0 \tag{1.16}$$

Deoarece i_0 s-a determinat ca funcție de ω_0, ecuația (1.16) servește pentru determinarea vitezelor unghiulare medii ω_0 care determină regimurile staționare

periodice. Rădăcinile acestei ecuații se pot obține aproximativ prin metoda grafică, intersectînd curbele

$$\Gamma(\omega_0) = \frac{\nu\omega_0^2}{2} f_1^{(0)}(\omega_0), \qquad \Gamma_1(\omega_0) = M_1\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_3\omega_0}{\alpha_1}\right) - D\omega_0 \tag{1.17}$$

Dacă condiția (1.16) este îndeplinită din (1.14) se găsește

$$\Omega_1 = \frac{\bar{\nu}\omega_0}{4} f_1^{(0)} \sin 2\varphi + \frac{\nu\omega_0}{4} e_1^{(0)} \cos 2\varphi - \frac{\bar{\delta}}{\omega_0} \cos\varphi \tag{1.18}$$

de unde rezultă că cele mai pronunțate neuniformități ale vitezei unghiulare se obțin pentru regimuri staționare apropiate de domeniile de rezonanță ale sistemului. Funcția Ω_1 fiind determinată, din ultima ecuație a sistemului (1.14) se obține soluția particulară

$$i_1 = A_1 \sin\varphi + B_1 \cos\varphi - A_2 \sin 2\varphi - B_2 \cos\varphi \tag{1.19}$$

unde

$$A_1 = \frac{\alpha_3\bar{\delta}}{\omega_0(1+\alpha_1^2)}, \quad B_1 = \frac{\alpha_1\alpha_3\bar{\delta}}{\omega_0(1+\alpha_1^2)}, \quad A_2 = \frac{\alpha_3\bar{\nu}\omega_0}{4} \frac{\alpha_1 f_1^{(0)} + 2e_1^{(0)}}{4+\alpha_1^2},$$

$$B_2 = \frac{\alpha_3\bar{\nu}\omega_0}{4} \frac{\alpha_1 e_1^{(0)} - 2f_1^{(0)}}{4+\alpha_1^2} \tag{1.20}$$

Înlocuind funcțiile Ω_1 și $y_j^{(0)}$ în (1.14) se găsesc soluțiile particulare:

$$y_j^{(1)} = \sum_{\sigma=1}^{3} (e_j^{(\sigma)} \cos\sigma\varphi + f_j^{(\sigma)} \sin\sigma\varphi) \tag{1.21}$$

unde constantele $e_j^{(\sigma)}$ și $f_j^{(\sigma)}$ se determină din sisteme analoge cu (1.13).

2. Este știut [2], [4], [5], [8], că nu toa regimurile staționare periodice, corespunzătoare rădăcinilor ecuației (1.16) sînt stabile. Din această cauză trebuie analizată stabilitatea regimurilor staționare. Pentru determinarea condițiilor de stabilitate se folosește metoda perturbațiilor, adică în locul soluțiilor staționare $\bar{y}_j$, $\bar{\Omega}$ și $\bar{i}$ se consideră soluțiile $\bar{y}_j + u_j$, $\bar{\Omega} + \bar{v}$, $\bar{i} + w$, unde u_j, v și w sînt perturbații presupuse mici. Înlocuind în (1.8) se obțin ecuațiile liniarizate în perturbații:

$$\sum_{j=1}^{n} (\mu_{ij}\bar{\Omega}^2 u_j'' + 2\zeta_{ij}\bar{\Omega}u_j' + \xi_{ij}^2 u_j) + \left[2\sum_{j=1}^{u} (\mu_{ij}\bar{\Omega}\bar{y}_j'' + \zeta_{ij}y_j')\right] v = \delta_1^i \left(\frac{\partial f}{\partial\Omega} v + \frac{\partial f}{\partial\Omega'} v'\right)$$

$$\bar{\Omega}v' + \bar{\Omega}'v = \varepsilon\bar{\nu}(\bar{\Omega}^2 u_1'' + 2\bar{\Omega}\bar{y}_1'' v)\sin\varphi - \varepsilon\bar{D}v + \varepsilon\frac{\partial M_1}{\partial\bar{i}} w \tag{2.1}$$

$$\bar{\Omega}w' + \bar{i}v + \alpha_1 w = -\alpha_3 v$$

Ecuațiile sistemului (2.1) sînt liniare, cu coeficienți periodici, deci forma soluțiilor acestui sistem se cunoaște pe baza teoriei lui Floquet. Pentru ca soluția periodică $\bar{y}_j$, $\bar{\Omega}$, $\bar{i}$ să fie asimptotic stabilă [1], [8], trebuie ca toți exponenții caracteristici ai soluțiilor ecuațiilor în variații să aibă părțile reale negative. Comportarea exponenților caracteristici se va analiza ținînd seama de presupunerea admisă $0<\varepsilon<<1$. În vederea ușurării calculelor se admite la început cazul limită cînd $\varepsilon\to 0_+$ pentru care se vor determina exponenții caracteristici. Pentru cazul nelimită se vor căuta exponenții caracteristici apropiați de cei obținuți în cazul limită, cînd $\bar{y}_j=y_j^{(0)}$, $\bar{\Omega}=\omega_0$, $\bar{i}=i_0$ și sistemul (2.1) devine

$$\sum_{j=1}^{n}(\mu_{ij}\omega_0^2u_j''+2\zeta_{ij}\omega_0u_j'+\xi_{ij}^2u_j)=\delta_1^i\frac{\delta f}{\delta\omega_0}v_0-2\left[\sum_{j=1}^{n}(\mu_{ij}\omega_0y_j^{(0)\prime\prime}+\zeta_{ij}y_j^{(0)\prime}\right]v_0$$

$$v'=0,\qquad \omega_0w'+\alpha_1w=-(\alpha_3+i_0)v_0 \tag{2.2}$$

unde v_0 este o constantă care poate fi aleasă nulă. Însemnează că pentru cazul limită cînd $\varepsilon\to 0_+$ unul din exponenții caracteristici este nul ($\lambda_0=0$) și $\lambda_1=-\frac{\alpha_1}{\omega_0}$, deci negativ deoarece $\alpha_1>0$ și $\omega_0>0$. Restul exponenților caracteristici se determină rezolvînd sistemul

$$\sum_{j=1}^{n}(\mu_{ij}\omega_0^2\lambda^2+2\zeta_{ij}\omega_0\lambda+\xi_{ij}^2)=0 \tag{2.3}$$

care conduce, după cum este știut la rădăcini complexe conjugate, cu părțile reale negative. Deoarece numai în a doua din ecuațiile (2.1) intervine parametrul mic ε, se poate admite că pentru ε suficient de mic, cu excepția lui λ_0 și λ_1, părțile reale ale exponenților caracteristici rămîn negative. Însemnează că în cazul cînd $0<\varepsilon<<1$, trebuie cercetați numai exponenții caracteristici λ_0 și λ_1. Conform teoriei lui Floquet, soluțiile sistemului (2.1) sînt:

$$u_j=e^{\lambda\varphi}P_j(\varphi),\quad v=e^{\lambda\varphi}Q(\varphi),\quad w=e^{\lambda\varphi}R(\varphi) \tag{2.4}$$

unde P_j, Q și R sînt funcții periodice în raport cu φ avînd perioada 2π.

Ținînd seama de existența parametrului mic ε în ecuațiile perturbațiilor, stabilitatea regimurilor staționare periodice se determină aproximativ punînd:

$$\begin{aligned}
&\lambda=\varepsilon\lambda_1+\varepsilon^2\lambda_2+\ldots\ldots\\
&P_j(\varphi)=P_j^{(0)}(\varphi)+\varepsilon P_j^{(1)}(\varphi)+\varepsilon^2P_j^{(2)}(\varphi)+\ldots\ldots\\
&Q(\varphi)=Q_0(\varphi)+\varepsilon Q_1(\varphi)+\varepsilon^2Q_2(\varphi)+\ldots\ldots\\
&R(\varphi)=R_0(\varphi)+\varepsilon R_1(\varphi)+\varepsilon^2R_2(\varphi)+\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Înlocuind soluțiile (2.4) în sistemul (2.1) se găsește:

$$\sum_{j=1}^{n}[\mu_{ij}\bar{\Omega}^2(P_j''+2\lambda P_j'+\lambda^2P_j)+2\zeta_{ij}\bar{\Omega}(\lambda P_j+P_j')+\xi_{ij}P_j]=$$

$$=\delta_1^i\left[\frac{\partial f}{\partial\bar{\Omega}}Q+\frac{\partial f}{\partial\dot{\bar{\Omega}}}(\lambda Q+Q')\right]-2\left[\sum_{j=1}^{n}(\mu_{ij}\bar{\Omega}\bar{y}_j''+\zeta_{ij}\bar{y}_j)\right]Q$$

$$\bar{\Omega}(\lambda Q+Q')+\bar{\Omega}'Q=\varepsilon\bar{\nu}\,\bar{\Omega}^2(P_1''+2\lambda P_1'+\lambda^2P_1)\sin\varphi+\varepsilon 2\bar{\nu}\,\bar{\Omega}\bar{y}_1''Q\sin\varphi- \tag{2.6}$$

$$-\varepsilon\bar{D}Q+\varepsilon\frac{\partial\bar{M}_1}{\partial\bar{i}}R$$

$$\bar{\Omega}(\lambda R+R')+\alpha_1R=-(\alpha_3+\bar{i})Q$$

Din (2.6) se găsește $Q_0'=0$ și cu excepția unei constante multiplicative luînd $Q_0=1$ rezultă

$$\omega_0R_0'+\alpha_1R_0=-(\alpha_3+i_0)$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\mu_{ij}\omega_0^2P_j^{(0)''}+2\zeta_{ij}\omega_0P_j^{(0)'}+\xi_{ij}^2P_j^{(0)})=\delta_1^i\frac{\partial f}{\partial\omega_0}-2\sum_{j=1}^{n}(\mu_{ij}\omega_0y_j^{(0)''}+\zeta_{ij}y_j^{(0)'}) \tag{2.7}$$

Pentru aproximația de ordinul întîi din sistemul (2.6) se găsește

$$\omega_0(Q_1'+\lambda_1)+\Omega_1'=\bar{\nu}\omega_0(\omega_0P_1^{(0)''}+2y_1^{(0)''})\sin\varphi-\bar{D}+R_0\frac{\partial}{\partial\omega_0}M_1\left(\frac{\alpha_2-\alpha_3\omega_0}{\omega_1}\right) \tag{2.8}$$

și deci ca să se obțină pentru Q_1 soluții periodice, trebuie să fie îndeplinită condiția

$$\omega_0\lambda_1+D+\frac{\nu\omega_0}{2}(\omega_0h_1^{(0)}+2f_1^{(0)})=R_0\frac{\partial}{\partial\omega_0}M_1\left(\frac{\alpha_2-\alpha_3\omega_0}{\omega_1}\right) \tag{2.9}$$

unde $h_1^{(0)}$ se obține considerînd soluțiile particulare $P_j^{(0)}(\varphi)$ ale sistemului (2.7) de forma

$$P_j^{(0)}(\varphi)=g_j^{(0)}(\omega)_0\cos\varphi+h_j^{(0)}(\omega_0)\sin\varphi,\quad (j=1,2,\ldots,n) \tag{2.10}$$

Ținînd seama că $\omega_0>0$, pentru ca regimul staționar periodic corespunzător unei rădăcini simple ω_0 ale ecuației (1.16) să fie stabil, trebuie ca din (2.9) să rezulte $\lambda_1<0$. Efectuînd calculele se găsește condiția de stabilitate

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\omega_0}>\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\omega_0} \tag{2.11}$$

Condiții de stabilitate analoge s-au obținut în lucrările [2], [5], [12] cu ajutorul unor considerații energetice.

3. În particular fie un sistem mecanic din două mase în mișcare de translație, legate între ele prin legături elastice liniare. Pe una din masele sistemului este montat motorul electric de curent continuu avînd excitația în serie, care acțio-

nează masa neechilibrată m_0. Frecările sistemului, prezentat schematic în fig. 4 se consideră de natură vîscoasă. Ecuațiile care descriu procesele electromecanice ale sistemului sînt:

$$m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2)\dot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-c_2\dot{x}_2-k_2x_2=m_0e_0(\ddot{\varphi}\sin\varphi+\dot{\varphi}^2\cos\varphi)-$$
$$-c_2\dot{x}_1-k_2x_1+m_2\ddot{x}_2+(c_2+c_3)\dot{x}_2+(k_1+k_3)x_2=0 \qquad (3.1)$$
$$J\ddot{\varphi}+c\dot{\varphi}=m_0e_0(\ddot{x}_1+g)\sin\varphi+k_Mi_i^2$$
$$Li\frac{di_i}{dt}+Ri_i=u_b-c_M\dot{\varphi}$$

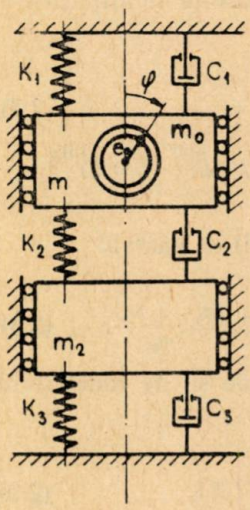


Fig. 4.

S-a considerat ca aplicație acest sistem deoarece el modelează unele din vibratoarele inerțiale care se folosesc la înfigerea și smulgerea elementelor din sol. Pentru analiza regimurilor staționare folosind notații analoge cu (1.7) în mărimi adimensionale se obțin ecuațiile:

$$\Omega^2y_1''+2D_1\Omega y_1'+y_1-2\mu D_3\Omega y_2'-\mu\omega_3^2y_2=\Omega\Omega'\sin\varphi+$$
$$+\Omega^2\cos\varphi-2D_3\Omega y_1'-\omega_3^2y_1+\Omega^2y_2''+2D_2\Omega y_2'+$$
$$+\omega_2^2y_2=0$$
$$\Omega\Omega'=\varepsilon(\bar{\nu}\Omega^2y_1''+\bar{\delta})\sin\varphi+\varepsilon\bar{D}_4i^2-\varepsilon\bar{D}\Omega \qquad (3.2)$$
$$\Omega i'+\alpha_1i=\alpha_2-\alpha_3\Omega$$

Considerînd dezvoltările (1.10) pentru aproximația de ordinul zero se găsesc soluțiile particulare

$$y_1^{(0)}=e_1^{(0)}\cos\varphi+f_1^{(0)}\sin\varphi$$
$$y_2^{(0)}=e_2^{(0)}\cos\varphi+f_2^{(0)}\sin\varphi \qquad (3.3)$$
$$\varphi=\omega_0t,\qquad i_0=\frac{\alpha_2-\alpha_3\omega_0}{\alpha_1}$$

Constantele $e_i^{(0)}$ și $f_i^{(0)}$ din (3.3) sînt date de

$$e_1^{(0)}=\omega_0^2\frac{\delta_1}{\Delta},\quad f_1^{(0)}=-\omega_0^2\frac{\delta_2}{\Delta},\quad e_2^{(0)}=\omega_0^2\frac{\delta_3}{\Delta},\quad f_2^{(0)}=-\omega_0^2\frac{d_4}{\Delta} \qquad (3.4)$$

unde:

$$\Delta=(1-\omega_0^2)\{(1-\omega_0^2)^2[(\omega_2^2-\omega_0^2)^2+4D_2^2\omega_0^2]+\mu(\omega_2^2-\omega_0^2)(4D_3^2\omega_0^2-\omega_3^4)-$$
$$-8\mu D_2D_3\omega_3^2\omega_0^2\}-4D_1\omega_0^2\{-D_1[(\omega_2^2-\omega_0^2)^2+4D_2^2\omega_0^2]+$$
$$+2\mu D_3\omega_3^2(\omega_2^2-\omega_0^2)+\mu D_2(4D_3^2\omega_0^2-\omega_3^4)\}-\mu\omega_3^2\{4D_1^2\omega_0^2[D_3(\omega_2^2-\omega_0^2)-$$

$$-D_2\omega_3^2]+(1-\omega_0^2)[\omega_3^2(\omega_2^2-\omega_0^2)+4D_2D_3\omega_0^4]-\mu\omega_3^2(\omega_3^4+4D_3^2\omega_0^2)\}+$$

$$+4\mu D_3^2\omega_0^2\{-D_1[4D_2D_3\omega_0^2+\omega_3^2(\omega_3^2-\omega_0^2)]-(1-\omega_0^2)[D_2\omega_3^2-D_3(\omega_2^2-\omega_5^2)]+$$

$$+\mu D_3(\omega_3^4+4D_3^2\omega_0^2)\}$$

$$\delta_1=(1-\omega_0^2)[(\omega_2^2-\omega_0^2)^2+4D_2^2\omega_0^2]+\mu(\omega_2^2-\omega_0^2)(4D_3^2\omega_0^2-\omega_3^4)-8\mu D_2D_3\omega_3^2\omega_0^2$$

$$\delta_2=2\omega_0\{-D_1[(\omega_2^2-\omega_0^2)^2+4D_2^2\omega_0^2]+2\mu D_3\omega_3^2(\omega_2^2-\omega_0^2)+\mu D_2(4D_3^2\omega_0^2-\omega_3^4)\}$$

$$\delta_3=4D_1\omega_0^2[D_3(\omega_3^2-\omega_0^2)-D_2^2\omega_3^2]+(1-\omega_0^2)[\omega_3^2(\omega_2^2-\omega_0^2)+4D_2D_3\omega_0^2]-$$

$$-\mu\omega_3^2(\omega_3^4+4D_3^2\omega_0^2)$$

$$\delta_4=2\omega_0\{-D_1[4D_2D_3\omega_0^2+\omega_3^2(\omega_2^2-\omega_0^2)]-(1-\omega_0^2)[D^2\omega_3^2-D_2(\omega_2^2-\omega_0^2)]+$$

$$+\mu D_3(\omega_3^4+4D_3^2\omega_0^2)\}$$

Pentru a găsi regimuri staționare periodice, în acest caz particular ecuația (1.16) devine

$$-\frac{\nu\omega_0^2}{2}\frac{\delta_2}{\Delta}-D\omega_0+D_4\left(\frac{\alpha_2-\alpha_3\omega_0)}{\alpha_1}\right)^2=0 \qquad (3.6)$$

adică

$$\Gamma(\omega_0)=\frac{\nu\omega_0^2\delta_2(\omega_0)}{2\Delta(\omega_0)}, \qquad \Gamma_1(\omega_0)=D_4\left(\frac{\alpha_2-\alpha_3\omega_0^2}{\alpha_1}\right)-D\omega_0 \qquad (3.7)$$

Pentru determinarea grafică a rădăcinilor ecuației (3.6) se intersectează caracteristica mecanică a sistemului $\Gamma(\omega_0)$ cu caracteristica motorului de acționare $\Gamma_1(\omega_0)$. În fig. 5 s-a reprezentat una din caracteristicile mecanice ale sistemului ținînd seama de rezultatele obținute în [5], [12]. Tot în această figură s-au reprezentat și trei caracteristici ale motorului electric. Se recomandă pentru acest caz particular că sînt posibile cel mult cinci rădăcini simple ale ecuației (3.6) notate cu $\omega_{0i}(i=1,2,..5)$ și ordonate astfel ca $\omega_{01}<\omega_{02}<\ldots<\omega_{05}$. Pentru oricare din aceste rădăcini este satisfăcută egalitatea

$$\Gamma(\omega_{0i})=\Gamma_1(\omega_{0i}) \qquad (3.8)$$

Din studiul stabilității regimurilor staționare a reieșit că dacă pentru ω_{0i} este satisfăcută și condiția

$$\frac{d\Gamma(\omega_0)}{d\omega_0}>\frac{d\Gamma_1(\omega_0)}{d\omega_0} \qquad (3.9)$$

atunci regimul staționar corespunzător rădăcinii simple ω_{0i} a ecuației (3.6) este stabil.

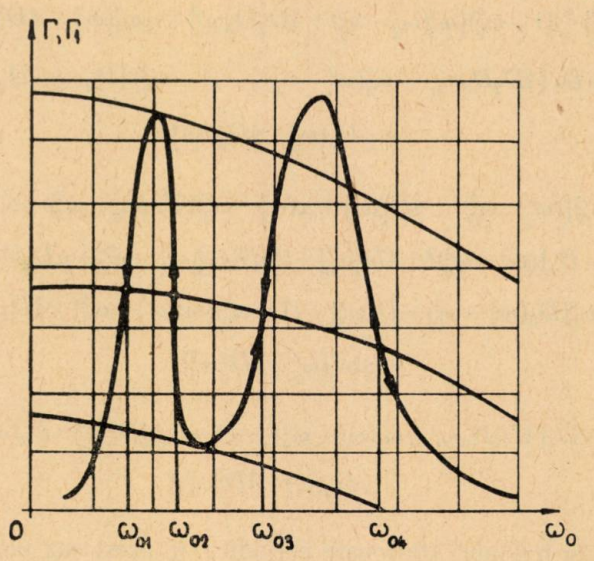


Fig. 5

Pentru aplicarea acestor concluzii și altor sisteme mecanice acționate cu motoare avînd puterea limitată se înțelege printr-un regim staționar stabil, un regim staționar care perturbat puțin și lăsat liber tinde în timp către regimul staționar avut înaintea perturbării. La condiția (3.9) se poate ajunge considerînd pentru una din rădăcinile ω_{0i} ale ecuației (3.6) o perturbare mică $\Delta\omega_{0i}>0$. Dacă se admite că $(\Delta\omega_{0i})^p\to 0$ pentru $p=<2,3,4,..$, atunci dezvoltînd funcțiile $\Gamma(\omega_0)$ și $\Gamma_1(\omega_0)$ se observă că dacă condiția (3.9) este satisfăcută atunci se găsesc și condițiile

$$\Gamma(\omega_{0i}+\Delta\omega_{0i})>\Gamma_1(\omega_{0i}+\Delta\omega_{0i}) \qquad (3.10)$$

$$\Gamma(\omega_{0i}-\Delta\omega_{0i})< \Gamma_1(\omega_{0i}-\Delta\omega_{0i})$$

Dacă $\Gamma>\Gamma_1$, sistemul lăsat liber după perturbare va avea mișcarea de rotație frînată și deci regimul nestaționar care se instalează după perturbarea cu $+\Delta\omega_{0i}$ a sistemului va tinde odată cu timpul la regimul staționar avut înainte de perturbare. Analog, dacă $\Gamma<\Gamma_1$ mișcarea de rotație va fi accelerată și regimul nestaționar care se instalează după perturbarea cu $-\Delta\omega_{0i}$ va tinde spre regimul staționar pe care l-a avut sistemul înainte de perturbare. Cu aceste observații în cazul sistemului particular din fig. 4, regimurile staționare corespunzătoare rădăcinilor simple ω_{01}, ω_{03} și ω_{05} sînt stabile, iar cele corespunzătoare rădăcinilor ω_{02} și ω_{04} sînt instabile. În fig. 6, s-a reprezentat una din curbele $\frac{d\Gamma}{d\omega_0}$ și o dreaptă $\frac{d\Gamma_1}{d\omega_0}$. Prin intersecția lor se separă domeniile de stabilitate ale sistemului notate cu D_s și cele de instabilitate notate cu D_i.

Dacă ω_{0i} este o rădăcină multiplă de ordinul r, atunci pentru această rădăcină au loc egalitățile.

$$\Gamma = \Gamma_1, \quad \frac{d^s\Gamma}{d\omega_0^s} = \frac{d^s\Gamma_1}{d\omega_0^s},$$

$$(s=1,2,\ldots, r-1) \qquad (3.11)$$

În acest caz ca pentru valoarea rădăcinii multiple să se obțină un regim staționar stabil trebuie să fie îndeplinită condiția

$$\left(\frac{d^r\Gamma}{d\omega_0^r}\right)_{\omega_0=\omega_{0i}} > \left(\frac{d^r\Gamma_1}{d\omega_0^r}\right)_{\omega_0=\omega_{0i}} \qquad (3.12)$$

dacă r este par. Dacă r este impar atunci pentru stabilitate trebuie să fie îndeplinite condițiile

$$\left(\frac{d^r\Gamma}{d\omega_0^r}\right)_{\omega_0=\omega_{0i}} > \left(\frac{d^r\Gamma_1}{d\omega_0^r}\right)_{\omega_0=\omega_{0i}},$$

$$(3.13)$$

$$\left(\frac{d^{r+1}\Gamma}{d\omega_0^{r+1}}\right)_{\omega_0=\omega_{01}} > \left(\frac{d^{r+1}\Gamma_1}{d\omega_0^{r+1}}\right)_{\omega_0=\omega_{0i}}$$

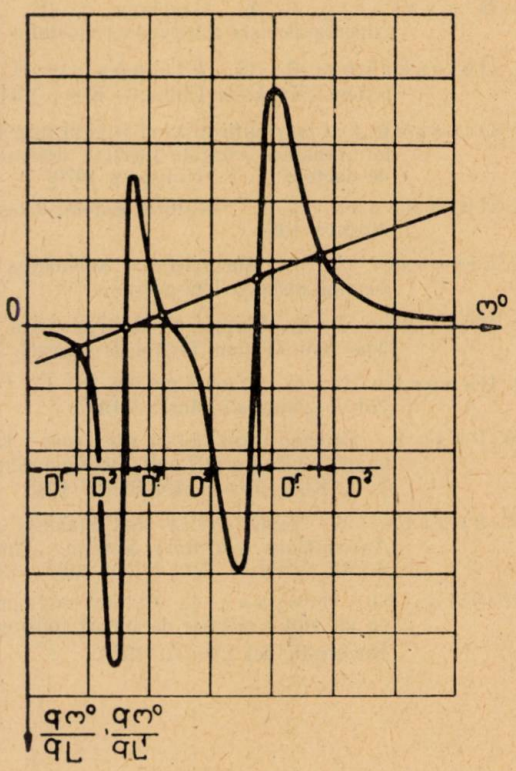


Fig. 6.

Rezultă că la sistemele mecanice cu excitație inerțială sînt posibile mai multe regimuri staționare periodice la un sistem de parametrii dați ai sistemului. Unele din aceste regimuri sînt situate sub domeniile de rezonanță ale sistemului iar altele peste aceste domenii. De asemenea unele din aceste regimuri staționare sînt stabile iar altele instabile. Pentru regimurile staționare apropiate de domeniile de rezonanță se obțin cele mai pronunțate neuniformități ale vitezei unghiulare și curentului.

Regimurile staționare se obțin în funcție de parametrii sistemului rezolvînd o ecuație algebrică (1.16) impusă pentru existența regimurilor staționare periodice, Stabilitatea acestor regimuri se analizează cu inegalități de tipul (2.11) care se pot obține ușor, analizînd caracteristica mecanică Γ a sistemului și caracteristica Γ_1 a motorului de acționare.

BIBLIOGRAFIE

1. Chetayev N., The stability of Motion, s. 51 Oxford, London, New York, Paris, 1961.
2. Christ H., An- und Auslauf eines gedämpften, unwuchterregten Schwingers. VDI-Berichte Nr. 135, 1969.

3. Dimentberg M. F., Frolov K. V., Effect Sommerfeld v sisteme so sluciaino izmeniaiusceisia sobstvennoi ciastotoi Dok. A. N. SSSR, 1966, 171 Nr. 6.

4. Goloskokov R. G., Filipov A. P., Nestationarnîe kolebaniia mehaniceskih sistem „Naukova Dumka", Kiev, 1966.

5. Groşanu I. Contribuţii privind studiul mişcărilor staţionare şi nestaţionare ale sistemelor mecanice excitate inerţial, acţionate cu motoare electrice. Rezumatul tezei de doctorat I. P. Timişoara 1970.

6. Kononenko V. O. Necatorîe sistemî s ogranicennîm vozbujdeniem Izd-vo „Nauka" Moskva 1964.

7. Livovici A. Iu, Mehaniceskie kolebaniia vozbujdaemîe elektrodvigatelem. Vesnik Leningradskogo Universiteta, Nr. 7 Vip 2, 1968.

8. Morrison J. A. Asymptotic Analysis of a Nonlinear Autonomous Vibratory System. The Bell System Technical Journal, January 1970.

9. Panovko Ia. G., Gubanova I. I., Ustoicivosti i kolebaniia uprughih Sistem. Izd-vo „Nauka", Moskva 1967.

10. Pust L., Perehod cerez oblast rezonansa i kolebatelnîh mehaniceskih sistem s ucetom vlianiia vibratora Trudî mejdunarodnogo simpoziuma po nelineinîm kolebanii. T. 3, Kiev, Izd-vo AN SSSR, 1963.

11. Senator M., Limit Cycless and Stability of a Nonlinear Two-Degree of Freedomm Autonomous Vibratory System, Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Serie B, Nr. 4 (November 1969).

12. Silaş Gh. Groşanu I., Studiul regimurilor staţionare ale unui vibrator acţionat cu un motor electric de curent continuu. A II-a Conferinţă de mecanică tehnică, Bucureşti, oct 29—31. 1970.

CONTRIBUŢII LA STUDIUL REGIMURILOR STAŢIONARE ALE UNUI SISTEM MECANIC CU EXCITAŢIA INERŢIALĂ

(REZUMAT)

În lucrare se studiază regimurile staţionare periodice ale unui sistem mecanic format din „n" mase în mişcare de translaţie în cazul cînd sistemul conţine un singur generator inerţial de vibraţii care este acţionat cu un motor electric de curent continuu.

Cu ajutorul condiţiilor de periodicitate, folosind metoda parametrului mic, se găseşte ecuaţia algebrică din care se obţin valorile medii ale vitezei unghiulare pentru care au loc regimuri staţionare periodice.

Pentru studiul stabilităţii se foloseşte metoda perturbaţiilor şi se obţine condiţia de stabilitate sub forma unei inegalităţi între pantele caracteristicii mecanice $\Gamma(\omega_0)$ şi a motorului de acţionare $\Gamma_1(\omega_0)$. Se arată apoi că la acelaşi rezultat se ajunge făcînd unele consideraţii energetice, care simplifică mult studiul stabilităţii.

BEITRAG ZUM STUDIUM DER STATIONÄREN BEWEGUNGZUSTÄNDE EINES UNWUCHTERREGTEN MECHANISCHEN VERBANDES

(ZUSAMMENFASSUNG)

Im Beitrag werden die stationären Bewegungszustände eines mechanischen Verbandes untersucht. Der Verband besteht aus „n" Massen, welche sich translatorisch bewegen und aus einem Unwuchterreger, welcher durch einen Gleichstrommotor angetrieben wird.

Mit der Methode der Störungsrechnung, wird aus den Periodizitätsbedingungen, die algebraische Gleichung bestimmt aus welcher die mittleren Werte der Winkelgeschwindigkeiten für stationäre periodische Bewegungszustände berechnet werden.

Zum Stabilitätsstudium wird die Methode der Störungsrechnung benützt und die Stabilitätsbedingung kann als Ungleichheit zwischen den Steigungen der Kurven $\Gamma(\omega_0)$ und $\Gamma_1(\omega_0)$, welche die mechanische Charakteristik und die des Antriebmotors darstellen, geschrieben werden. Abschliessend wird gezeigt, dass energetische Überlegungen, welche das Stabilitätsstudium vereinfachen, zu denselben Ergebnissen führen.

К ИССЛЕДОВАНИЮ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИНЕРЦИАЛЬНЫМ ВОЗДУЖДЕНИЕМ

(РЕЗЮМЕ)

В работе рассматриваются стационарные режимы механической системы, состоящей из «n» масс в поступотельном движении, когда сситема обладает единственным инерциальным виброгенератором на двигателе постоянного тока.

При помощи условий периодичности, применяя метод малого параметра, устанавливается алгебраическое уравнение из которого получаются средние значения угловой скорости при которой имеют место стационарные периодические режимы.

Для исследования устойчивости применяется метод возмущений и получается условие устойчивости в виде равенства между угловым коэффициентом механической характеристики $\Gamma_1(\omega_0)$ и приводного двигателя $\Gamma(\omega_0)$.

Указывается затем, что к тому же результату можно прийти принимая некоторые энергетические условия облегчающие изучение устойчивости.

CONTRIBUȚII PRIVIND STUDIUL MIȘCĂRILOR PERIODICE OPTIME ALE SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE CU UN GRAD DE LIBERTATE

DE

SILAȘ GH. HEGEDÜS A.

1) Introducere

Deoarece mecanismele vibropercutante se răspîndesc din ce în ce mai mult în practică și numărul studiilor privind dinamica acestor mecanisme crește contînu. Problema principală în legătură cu mecanismele vibropercutante este determinarea condițiilor în care pot să apară mișcări periodice și studiul stabilității acestora. În general forțele de excitație se presupun cunoscute și de cele mai multe ori ele se consideră armonice. Dintre studiile privind dinamica sistemelor vibropercutante cu un grad de libertate menționăm lucrările [1] — [10].

În ultimul timp atenția cercetătorilor este îndreptată spre problema optimizării sistemelor vibropercutante [11] — [16]. Menționăm însă că în aceste lucrări nu se studiază stabilitatea mișcărilor optime. Optimizarea se poate face după mai multe criterii. Criteriul cel mai important este impulsul ce apare în momentul ciocnirii, respectiv viteza de ciocnire. Problema optimizării poate fi formulată în două feluri : a) Dacă se cunoaște forța de excitație, cum trebuie să se aleagă parametrii sistemului pentru o funcționare optimă. b) Sistemul fiind dat, cum trebuie să fie forța de excitație pentru a se obține mișcare optimă. În cele ce urmează vom studia problema optimizării sub cele două aspecte pentru un sistem vibropercutant cu un grad de libertate. Se va studia și stabilitatea mișcărilor optime. Din studiul stabilității reiese că mișcările optime în anumite domenii sînt instabile.

2) Studiul mișcărilor periodice și a stabilității acestora cînd forța de excitație este periodică oarecare

Modelul mecanic al unui sistem vibropercutant cu un grad de libertate cu o cuplă percutantă este arătat în fig. 1. El este format dintr-un corp C de masă m legat de un arc cu constanta elastică k. Sub acțiunea forței de excitație periodice $F(t)$ corpul C execută mișcare vibratorie avînd loc ciocniri cu un limitator fix L. Se va considera că disipare de energie are loc numai la ciocniri și că ciocnirile sînt instantanee fiind caracterizate prin coeficientul

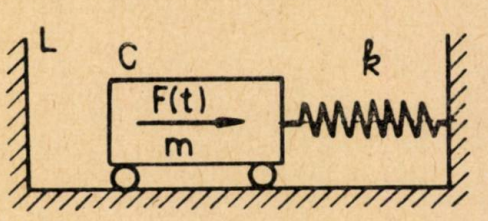


Fig. 1.

de restituire R $(0<R<1)$. Se va considera că forța de excitație $F(t)$ se exprimă printr-o funcție periodică oarecare cu perioada T de forma:

$$F(t)=F_0 f(t), \tag{1}$$

unde F_0 este valoarea maximă a lui $F(t)$, iar $f(t)$ o funcție periodică adimensională cu perioada T astfel încît:

$$|f(t)|\leqslant 1 \tag{2}$$

Notînd cu x abscisa corpului C măsurată din poziția în care arcul este nedeformat cu sensul pozitiv spre dreapta, ecuația diferențială a mișcării între două ciocniri succesive este:

$$m\ddot{x}+kx=F(t) \tag{3}$$

Introducînd variabilele adimensionale

$$\tau=\omega t, \qquad z=\frac{m\omega_n^2}{F_0}x, \tag{4}$$

unde:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}, \qquad \omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5}$$

și parametrul adimensional

$$\eta=\frac{\omega_n}{\omega} \tag{6}$$

ecuația diferențială (3) devine:

$$z''+\eta^2 z=\eta^2 f(\tau) \tag{7}$$

Notăm cu d valoarea lui x și cu $\delta=\frac{m\omega_n^2}{F_0}d$ valoarea lui z în momentul ciocnirii. Dacă $\delta<0$, sistemul este cu joc, iar dacă $\delta>0$, sistemul este cu strîngere. Vom studia mișcarea între două ciocniri succesive de ordinul i și $i+1$. Notăm cu τ_i momentul adimensional al ciocnirii de ordinul i și cu $-u_i$, $(u_i>0)$ viteza adimensională înaintea acestei ciocniri. Viteza după ciocnire va fi Ru_i. Ciocnirea următoare va avea loc în momentul τ_{i+1} și viteza înaintea acestei ciocniri va fi $-u_{i+1}$. Astfel condițiile inițiale și finale ale mișcării dintre cele două ciocniri sînt:

$$\tau=\tau_i, \quad z=\delta, \quad z'=Ru_i \tag{8}$$

$$\tau=\tau_{i+1}, \quad z=\delta, \quad z'=-u_{i+1}. \tag{9}$$

Pentru ca mișcarea să fie periodică este necesar ca durata mișcării dintre ciocniri să fie un multiplu al perioadei forței iar viteză în momentul ciocnirii să fie egală cu viteza dinaintea ciocnirii precedente, adică să avem

$$\tau_{i+1}-\tau_i=2\pi n, \qquad u_{i+1}=u_i. \tag{10}$$

Legea mișcării, soluția ecuației diferențiale (7) ținînd seama de condițiile inițiale (8) este

$$z=\delta\cos\eta\,(\tau-\tau_i)+\frac{Ru_i}{\eta}\sin\eta(\tau-\tau_i)+\eta\int_{\tau_i}^{\tau}f(\theta)\sin\eta\,(\tau-\theta)d\theta \qquad (11)$$

iar viteza

$$z'=-\delta\eta\sin\eta\,(\tau-\tau_i)+Ru_i\cos\eta\,(\tau-\tau_i)+\eta^2\int_{\tau_i}^{\tau}f(\theta)\sin\eta\,(\tau-\theta)d\theta. \qquad (12)$$

Înlocuind condițiile (9) în ecuațiile (11) și (12) rezultă:

$$-\delta+\delta\cos\eta\,(\tau_{i+1}-\tau_i)+\frac{Ru_i}{\eta}\sin\eta\,(\tau_{i+1}-\tau_i)+\eta\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f(\tau)\sin\eta\,(\tau_{i+1}-\tau)d\tau=0 \qquad (13)$$

$$u_{i+1}-\delta_\eta\sin\eta\,(\tau_{i+1}-\tau_i)+Ru_i\cos\eta\,(\tau_{i+1}-\tau_i)+\eta^2\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f(\tau)\cos\eta(\tau_{i+1}-\tau)d\tau=0 \qquad (14)$$

Ecuațiile (13) și (14) fac legătura dintre parametrii sistemului corespunzător celor două ciocniri. Cu ajutorul lor se pot studia atît mișcările tranzitorii cît și cele periodice. Ne vom ocupa numai de mișcările periodice. Înlocuind condițiile de periodicitate (10) în ecuațiile (13) și (14) se obține următorul sistem cu necunoscutele u_i și τ_i.

$$-\delta+\delta\cos\alpha+\frac{Ru_i}{\eta}\sin\alpha+\eta\int_{\tau_1}^{\tau_i+a}f(\tau)\sin\eta\,(\tau_i+a-\tau)\,d\tau=0 \qquad (15)$$

$$u_i-\delta\eta\sin\alpha+Ru_i\cos\alpha+\eta^2\int_{\tau_i}^{\tau_i+a}f(\tau)\cos\eta\,(\tau_i+a-\tau)d\tau=0,$$

unde s-au făcut notațiile

$$a=2\pi n, \qquad \alpha=a\eta=2\pi n\eta. \qquad (16)$$

Eliminînd din sistemul (15) viteza u_i se obține ecuația

$$\delta=\eta\frac{\int_{\tau_i}^{\tau_i+a}f(\tau)[\sin\eta\,(\tau_i+a-\tau)+R\sin\eta\,(\tau_i-\tau]d\tau}{(1-R)\,(1-\cos\alpha)} \qquad (17)$$

care determină momentele τ_i, iar pentru viteza de ciocnire u_i rezultă expresia

$$u_i=\eta^2\frac{\int_{\tau_i}^{\tau_i+a}f(\tau)\,[\cos\eta\,(\tau_i-\tau)-\cos\eta\,(\tau_i+a-\tau)d\tau}{(1-R)\,(1-\cos\alpha)} \qquad (18)$$

în funcție de τ_i.

Rezultatele obținute sînt valabile dacă $R \neq 1$ și $\eta \neq 1, 2, \ldots\ldots$ Astfel cazul rezonanței ($\eta = 1$) trebuie studiat separat.

Pentru ca mișcările periodice să existe este necesar ca din ecuația (17) să rezulte pentru τ_i valori reale, iar pentru u_i din (18) valori pozitive.

Pentru existența mișcărilor periodice cu perioada $2\pi n$ mai este necesar ca în intervalul $(\tau_i, \tau_i + 2\pi n)$ să nu apară ciocniri cu limitatorul, adică să avem în acest interval $z > \delta$. Aceasta matematic se exprimă prin aceea ca minimul funcției z în intervalul $(\tau_i, \tau_i + 2\pi n)$ să fie mai mare sau egal cu δ. Situația limită este cînd avem:

$$z(\tau^*) = \delta, \quad z'(\tau^*) = 0 \text{ unde } \tau^* \in (\tau_i, \tau_i + 2\pi n). \tag{19}$$

Înlocuind condițiile (19) în ecuațiile (11), (12) și notînd $\tau^* - \tau_i = \gamma$, se obține sistemul:

$$\delta = \eta \frac{\int_{\tau_i}^{\tau_i + \gamma} f(\tau) \sin \eta (\tau - \tau_i) d\tau}{2 \sin^2 \frac{\eta\gamma}{2}} \tag{20}$$

$$u_i = \eta^2 \frac{\int_{\tau_i}^{\tau_i + \gamma} f(\tau) \sin \eta \left(\tau - \tau_i - \frac{\gamma}{2}\right) d\tau}{R \sin \frac{\eta\gamma}{2}}. \tag{21}$$

Cum viteza u_i este dată de (18) din ecuația (21) se determină valoarea lui γ, și apoi din (20) rezultă valoarea limită a lui δ.

Pentru studiul stabilității mișcărilor periodice vom aplica metoda transformărilor punctuale sub forma dată în [5].

Dacă ecuațiile (13) și (14) se notează prescurtat prin

$$\varphi_j(\tau_i, \tau^i{}_{+1}, u_i, u_{i+1}) = 0, \qquad j = 1,2 \tag{22}$$

ecuația caracteristică în β are forma:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_{i+1}} \beta + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_i} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_{i+1}} \beta + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_i} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau_{i+1}} \beta + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau_i} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_{i+1}} \beta + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_i} \end{vmatrix} = 0 \tag{23}$$

Toate derivatele se calculează pentru valorile parametrilor corespunzătoare mișcărilor periodice [(17), (18)].

Mișcarea periodică este stabilă dacă ecuația caracteristică are rădăcini în modul subunitare. După efectuarea calculelor, ținînd seama de (15) ecuația caracteristică (23) devine:

$$\beta^2 + \left\{2R \cos \alpha - \frac{[\delta - f(\tau_i)]\eta (1+R) \sin \alpha}{u_i}\right\} \beta + R^2 = 0 \tag{24}$$

unde u_i este viteza de ciocnire dată de relația (18). Pentru ca ecuația (23) să aibă rădăcini în modul subunitare trebuie să fie verificate condițiile lui Schur [6], adică trebuie să avem:

$$R<1 \tag{25}$$

$$-1<\frac{2R\cos\alpha-\frac{[\delta-f(\tau_i)\eta(1+R)\sin\alpha}{u_i}}{1+R^2}<1. \tag{26}$$

Prin urmare pentru a avea mișcări periodice stabile valorile parametrilor τ_i și u_i date de relațiile (17), (18) trebuie să verifice condițiile (26).

3) Cazul excitației armonice. Determinarea mișcărilor optime

În continuare pe baza rezultatelor obținute în paragraful 2 se va studia cazul cînd forța de excitație este armonică, adică:

$$f(\tau)=\sin\tau. \tag{27}$$

Înlocuind (27) în (17) se obține ecuația:

$$\delta=-\frac{\eta^2}{1-\eta^2}\sin\tau_i+\frac{1+R}{1-R}\cdot\frac{\eta}{1-\eta}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\cos\tau_i. \tag{28}$$

Viteza de ciocnire (18) în cazul excitației armonice (27) va fi:

$$u_i=\frac{2\eta^2}{1-\eta^2}\frac{\cos\tau_i}{1-R}. \tag{29}$$

Mișcarea periodică a sistemului va fi optimă, dacă viteza de ciocnire dată de (29j este maximă. Pentru aceasta este necesar să avem:

$$\cos\tau_i=1,\ (\tau_i=0),\ \text{dacă}\ \eta<1 \tag{30}$$

respectiv:

$$\cos\tau_i=-1,\ (\tau_i=\pi),\ \text{dacă}\ \eta>1 \tag{31}$$

adică ciocnirile să aibă loc în momentele în care forța de excitație este nulă. S-a considerat originea de măsurare a timpului ($\tau=0$) începutul perioadei forței în care are loc ciocnirea de ordinul i. Viteza de ciocnire maximă posibilă este:

$$u_{i\,max}=\frac{2\eta^2}{1-\eta^2}\cdot\frac{1}{1-R},\ \text{dacă}\ \eta<1 \tag{32}$$

$$u_{i\,max}=-\frac{2\eta^2}{1-\eta^2}\cdot\frac{1}{1-R},\ \text{dacă}\ \eta>1. \tag{33}$$

Pentru ca să se realizeze un regim de mișcare în care viteza de ciocnire este maximă, este necesar ca parametrul δ să aibă o valoare bine determinată și anume valoarea ce rezultă din (28) pentru valorile lui τ_i date de (30), (31)

$$\delta_{0p} = \frac{1+R}{1-R}\frac{\eta}{1-\eta^2}\operatorname{cotg}\pi n\eta, \text{ dacă } \eta<1 \tag{34}$$

$$\delta_{0p} = -\frac{1+R}{1-R}\frac{\eta}{1-\eta^2}\operatorname{cotg}\pi n\eta, \text{ dacă } \eta>1 \tag{35}$$

Relațiile (32), (33) arată că valoarea vitezei maxime de ciocnire nu depinde de n. De aici rezultă că din punct de vedere practic cele mai eficace sînt mișcările optime avînd perioada egală cu perioada forței de excitație.

Pentru existența mișcărilor periodice optime trebuie să fie verificate condițiile (20), (21) care în acest caz conduc la următorul sistem:

$$\frac{1-R}{1+R} = \frac{1}{\eta\sin\gamma\operatorname{cotg}\frac{\eta\gamma}{2}-\cos\gamma} \tag{36}$$

$$\frac{1-R}{1+R} = \frac{\cos\eta\gamma-\sin\eta\gamma\operatorname{cotg}\pi n\eta}{\cos\gamma}, \tag{37}$$

care determină domeniile de existență ale mișcărilor periodice optime în planul (R,η). Pentru $n=1$ rezultă că mișcările optime nu sînt posibile dacă $\eta>1$, însă în cazul $\eta<1$ nu apar ciocniri suplimentare în intervalul $(\tau_i, \tau_i+2\pi)$ decît pentru valori foarte mici ale lui R (zona nehașurată din fig. 2).

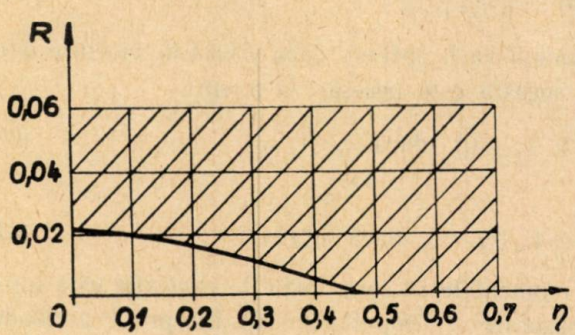


Fig. 2.

În fig. 3 s-a reprezentat grafic pe baza relației (34) δ_{0p} în funcție de η pentru $n=1$ și patru valori ale lui R: 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; iar în fig. 4 viteza de ciocnire maximă pentru aceleași valori ale lui R.

Legea mișcării optime și viteza între ciocniri se obțin din (11), (12) ținînd seama de relațiile (30) — (35)

$$z = \frac{1+R}{1-R}\cdot\frac{\eta}{1-\eta^2}\frac{1}{\sin\pi n\eta}\cos\eta(\tau-\pi n) - \frac{\eta^2}{1-\eta^2}\sin\tau \tag{38}$$

$$z' = -\frac{1+R}{1-R}\cdot\frac{\eta^2}{1-\eta}\frac{1}{\sin\pi n\eta}\sin\eta(\tau-\pi n) - \frac{\eta^2}{1-\eta^2}\cos\tau. \tag{39}$$

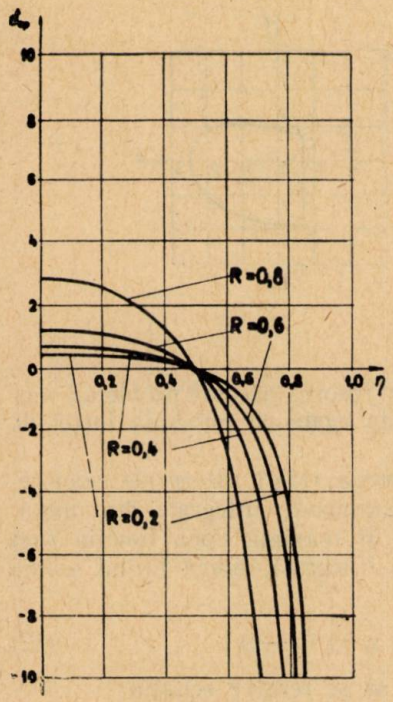


Fig. 3.

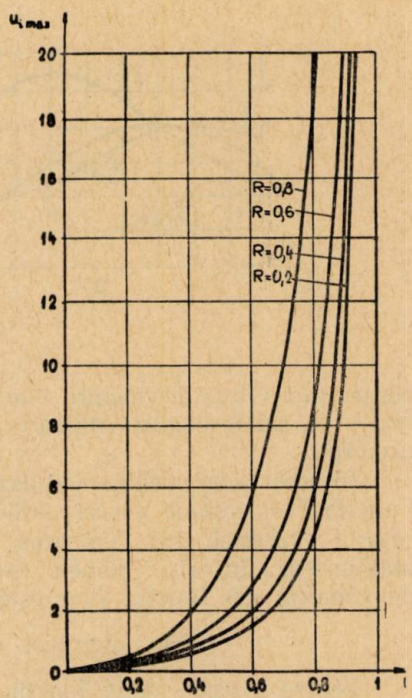


Fig. 4.

Pentru studiul stabilității mișcărilor optime înlocuim în condițiile (26) $f(\tau_i)=0$, δ cu valoarea (34) și u_i cu (32). După efectuarea calculelor, condițiile (26) devin

$$(1+R)^2 > -(1-R)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tag{40}$$

$$(1-R)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} < (1-R)^2, \tag{41}$$

care sînt verificate pentru toate valorile lui R ($R<1$), η ($\eta \neq 1, 2 \ldots$) și n. Prin urmare mișcările optime, pentru care condițiile de existență sînt verificate, sînt totdeauna stabile.

În fig. 5, a s-au reprezentat diagramele mișcării optime între două ciocniri consecutive pentru $n=1$, $R=0{,}4$; $\eta=0{,}6$, iar în fig. 5, b traiectoria de fază pentru aceeași mișcare.

4) Determinarea forței de excitație optime

În acest paragraf vom studia optimizarea sistemului vibropercutant din fig. 1 sub aspectul forței de excitație. Cu alte cuvinte se va căuta forța de excitație $f(\tau)$ presupusă periodică cu perioada 2π și care verifică condiția (2),

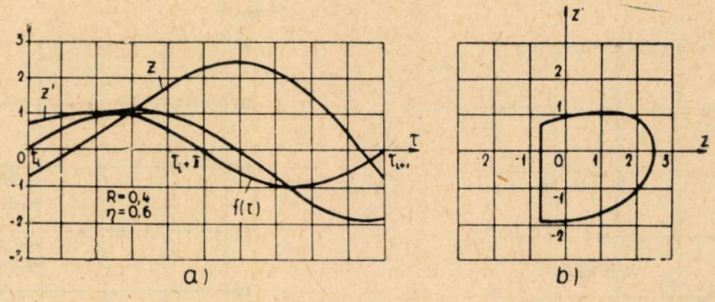


Fig. 5.

pentru care viteza de ciocnire este maximă. Vom rezolva această problemă pentru $n=1$, adică pentru mișcări avînd perioada egală cu perioada forței de excitație.

În acest scop trebuie să plecăm de la expresia (18) a vitezei de ciocnire. Funcția $f(\tau)$ trebuie aleasă astfel încît să maximizeze integrala din numărătorul expresiei (18). Valoarea integralei va fi maximă dacă funcția $f(\tau)$ maximizează în orice moment expresia de sub integrală, adică ținînd seama de condiția (2) funcția $f(\tau)$ este:

$$(\tau)= \text{sign}\,[\cos\ \eta\,(\tau_i-\tau)-\cos\ \eta\,(\tau_i+a-\tau)\,]. \tag{42}$$

Pentru a găsi efectiv funcția $f(\tau)$ trebuie să se rezolve ecuația:

$$\cos\ \eta\,(\tau_i-\tau)-\cos\ \eta\,(\tau_i+a-\tau)=0$$

sau

$$\cos\ \eta\,(\tau_i-\tau)=\cos\ \eta\,(\tau_i+a-\tau), \tag{43}$$

unde $a=2\pi$. Soluția ecuației (43) este:

$$\tau=\tau_i+\pi-\frac{k}{\eta}\pi. \tag{44}$$

Ne interesează numai soluțiile cuprinse în intervalul $(\tau_i,\ \tau_i+2\pi)$. Dacă $\eta<1$, singura soluție cuprinsă în intervalul menționat este:

$$\tau=\tau_i+\pi, \tag{45}$$

care corespunde semiperioadei mișcării. Este interesant de menționat că soluția (45) ce se obține în cazul $\eta<1$ (deasupra rezonanței) nu depinde nici de valoarea lui R nici de valoarea lui η. Forța de excitație optimă în acest caz este:

$$f(\tau)=\begin{cases} +1 & \text{pentru } \tau\in(\tau_i,\ \tau_i+\pi) \\ 0 & \text{pentru } \tau=\tau_i,\ \tau_i+\pi,\ \tau_i+2\pi \\ -1 & \text{pentru } \tau\in(\tau_i+\pi,\ \tau_i+2\pi) \end{cases} \tag{46}$$

fiind reprezentată în fig. 6.

Dacă $\eta > 1$, ecuația (43) are și alte soluții afară de (45). Astfel dacă $\eta \in (1,2)$ mai rezultă două soluții:

$$\tau = \tau_i + \pi - \frac{1}{\eta}\pi \text{ și}$$

$$\tau = \tau_i + \pi + \frac{1}{\eta}\pi \qquad (47)$$

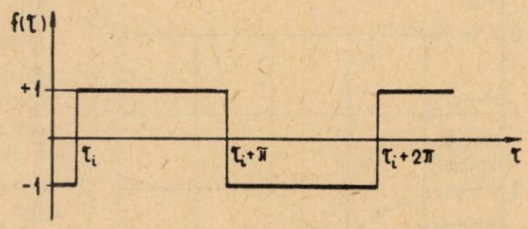


Fig. 6.

În acest caz forța de excitație optimă este:

$$f(\tau) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } \tau = \tau_i,\ \tau_i + \pi - \frac{1}{\eta}\pi,\ \tau_i + \pi,\ \tau_i + \pi + \frac{1}{\eta}\pi,\ \tau_i + 2\pi \\ +1 \text{ pentru } \tau \in (\tau_i,\ \tau_i + \pi - \frac{1}{\eta}\pi) \\ -1 \text{ pentru } \tau \in (\tau_i + \pi - \frac{1}{\eta}\pi,\ \tau_i + \pi) \\ +1 \text{ pentru } \tau \in (\tau_i + \pi,\ \tau_i + \pi + \frac{1}{\eta}\pi) \\ -1 \text{ pentru } \tau \in (\tau_i + \pi + \frac{1}{\eta}\pi,\ \tau_i + 2\pi) \end{cases} \qquad (48)$$

fiind reprezentată în fig. 7 pentru $\eta = 1{,}2$.

Vom analiza mai amănunțit cazul $\eta < 1$, cînd forța de excitație optimă este dată de relațiile (46). Aceste relații arată că pentru a se realiza mișcarea optimă este necesar ca forța de excitație să aibă o variație dreptunghiulară (ca în fig. 6) și în plus ciocnirile să aibă loc în momentele în care forța de excitație își schimbă sensul și anume cînd trece de la valoarea negativă la valoarea pozitivă (ca și în cazul excitației armonice). În aceste condiții viteza de ciocnire (18) este maximă și este egală cu

$$u_{i\,max} = \frac{2\eta}{1-R} \operatorname{tg} \frac{\eta\pi}{2}. \qquad (49)$$

Pentru ca să se realizeze regimul de mișcare în care viteza de ciocnire este maximă este necesar pe lîngă excitația optimă (46), ca jocul δ să aibă o valoare bine determinată ce rezultă din ecuația (17)

$$\delta_{0p} = \frac{1+R}{1-R} \operatorname{tg} \frac{\eta\pi}{2} \operatorname{cotg} \eta\pi. \qquad (50)$$

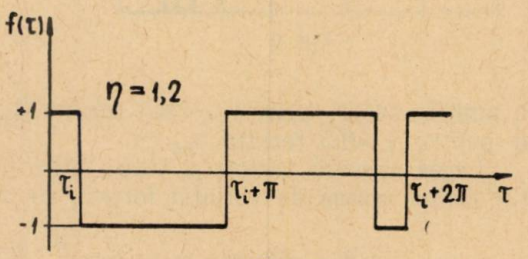


Fig. 7.

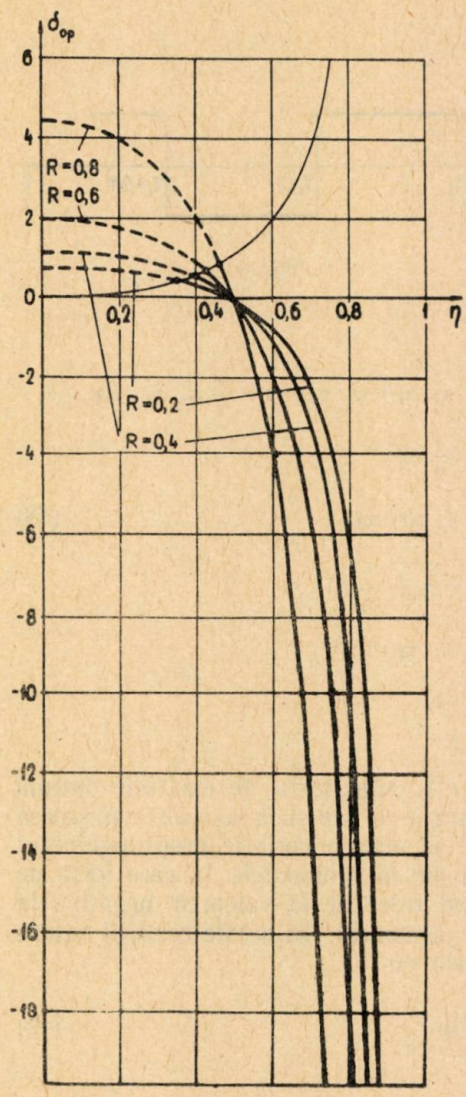


Fig. 8.

Dacă jocul δ diferă de valoarea optimă (50) ciocnirea nu are loc în momentul în care forța de excitație își schimbă sensul și viteza de ciocnire nu are valoarea maximă (49). În fig. 8 s-au reprezentat curbele δ_{0p} în funcție de η pentru $R=0{,}2\ ;\ 0{,}4\ ;\ 0{,}6\ ;\ 0{,}8$ iar în fig. 9 $u_{i\,max}$ în funcție de η pentru aceleași valori ale lui R.

Curbele din fig. 8 sînt asemănătoare cu cele din fig. 3 obținute în cazul excitației armonice, iar curbele din fig. 9 sînt asemănătoare cu cele din fig. 4.

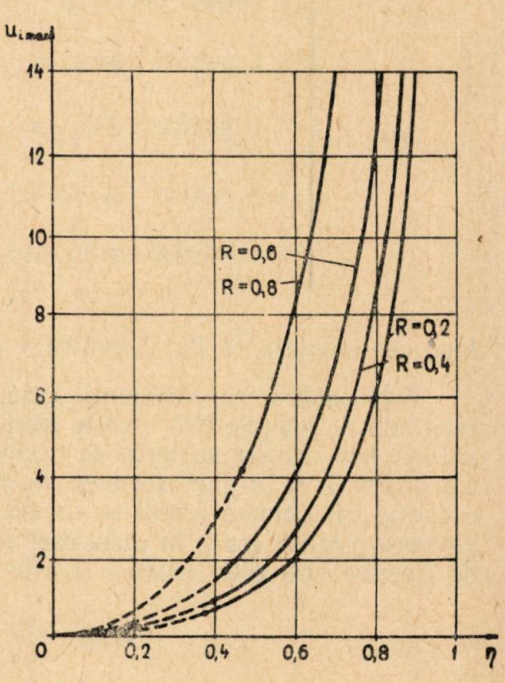


Fig. 9.

În ambele cazuri pentru $\eta<0{,}5$ rezultă $\delta_{0p}>0$, pentru $\eta=0{,}5$ avem $\delta_{0p}=0$, iar pentru $\eta>0{,}5$ rezultă $\delta_{0p}<0$.

Legea mișcării optime și viteza între două ciocniri se obțin tot din (11), (12) ținînd seama de variația forței $f(\tau)$ dată de (46):

$$z=(\delta_{0p}-1)\cos\eta\,(\tau-\tau_i)+\frac{Ru_{i\,max}}{\eta}\sin\eta\,(\tau-\tau_i)+1 \qquad (51)$$

$$z' = -(\delta_{0p} - 1)\,\eta \sin \eta(\tau - \tau_i) + Ru_{imax} \cos \eta(\tau - \tau_i) \tag{52}$$

pentru $\tau \in (\tau_i,\ \tau_i + \pi)$ și

$$z = (\delta_{0p} - 1) \cos \eta(\tau - \tau_i) + \frac{Ru_{imax}}{\eta} \sin \eta(\tau - \tau_i) + 2 \cos \eta(\tau - \tau_i - \pi) - 1 \tag{53}$$

$$z' = -(\delta_{0p} - 1)\,\eta \sin \eta(\tau - \tau_i) + Ru_{imax} \cos \eta(\tau - \tau_i) - 2\eta \sin \eta(\tau - \tau_i - \pi) \tag{54}$$

pentru $\tau \in (\tau_i + \pi,\ \tau_i + 2\pi)$.

Se poate arăta ușor că în acest caz nu apar ciocniri suplimentare în intervalul $(\tau_i,\ \tau_i + 2\pi)$. Viteza z' dată de (52) se poate anula cel mult o dată în intervalul $(\tau_i,\ \tau_i + \pi)$. În punctul respectiv z are un maxim, deoarece dacă $R \neq 0$, z crește la început. În intervalul $(\tau_i, + \pi,\ \tau_i + 2\pi)$ ecuația $z' = 0$ poate avea cel mult o rădăcină. Aici funcția z ar avea un minim, ceea ce însă ar însemna ca viteza în momentul $\tau_i + 2\pi$ să fie pozitivă. Cum acest caz este exclus, z poate avea în intervalul $(\tau_i,\ \tau_i + 2\pi)$ un singur maxim, deci nu apar ciocniri suplimentare în acest interval.

Urmează să mai cercetăm stabilitatea mișcărilor optime.

Ecuația caracteristică (24) precum și condițiile de stabilitate (26) sînt valabile și în cazul acesta. Deoarece însă pentru $\tau = \tau_i$ funcția $f(\tau)$ prezintă o discontinuitate trebuie să se considere două cazuri și anume $f(\tau_i - 0) = -1$ și $f(\tau_i + 0) = +1$. În conformitate cu aceasta, ținînd seama de relațiile (49) și (50), condițiile de stabilitate (26) conduc la inegalitățile

$$\operatorname{tg} \frac{\eta\pi}{2} > \frac{1+R}{1-R} \operatorname{cotg} \eta\pi \tag{55}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\eta\pi}{2} > -\frac{(1-R^2) \sin 2\pi\eta}{2[(1-R)^2 \cos^2 \eta\pi + (1+R)^2]} \tag{56}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\eta\pi}{2} > -\frac{1+R}{1-R} \operatorname{cotg} \eta\pi \tag{57}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\eta\pi}{2} > \frac{(1-R^2) \sin 2\pi\eta}{2[(1-R)^2 \cos^2 \eta\pi + (1+R)^2]}\,. \tag{58}$$

Condițiile (56)—(58) sînt verificate pentru orice $\eta \in (0,1)$ și orice $R \in (0,1)$, iar condiția (58) este echivalentă cu

$$\operatorname{tg} \frac{\eta\pi}{2} > \sqrt{\frac{1+R}{3-R}} \tag{59}$$

Relația (59) arată că mișcarea optimă spre deosebire de cazul excitației armonice nu totdeauna este stabilă. Condiția (59) este verificată, dacă

$$\eta > \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+R}{3-R}}\,. \tag{60}$$

Porțiunile de curbă din fig. 8 care corespund mișcărilor instabile s-au reprezentat prin linie întreruptă. Se poate arăta ușor că punctele care delimitează porțiunile din curbele δ_{0p} ce corespund mișcărilor stabile se găsesc pe curba

$$\delta = \operatorname{tg}^2 \frac{\eta\pi}{2} \tag{61}$$

care s-a reprezentat în fig. 8 prin linie continuă mai subțire. În fig. 9 de asemenea s-au trasat cu linie întreruptă porțiunile de curbă ce corespund mișcărilor instabile.

În fig. 10, a s-au reprezentat diagramele mișcării optime pentru $R=0{,}4$, $\eta=0{,}6$, iar în fig. 10, b traiectoria de fază pentru aceeași mișcare.

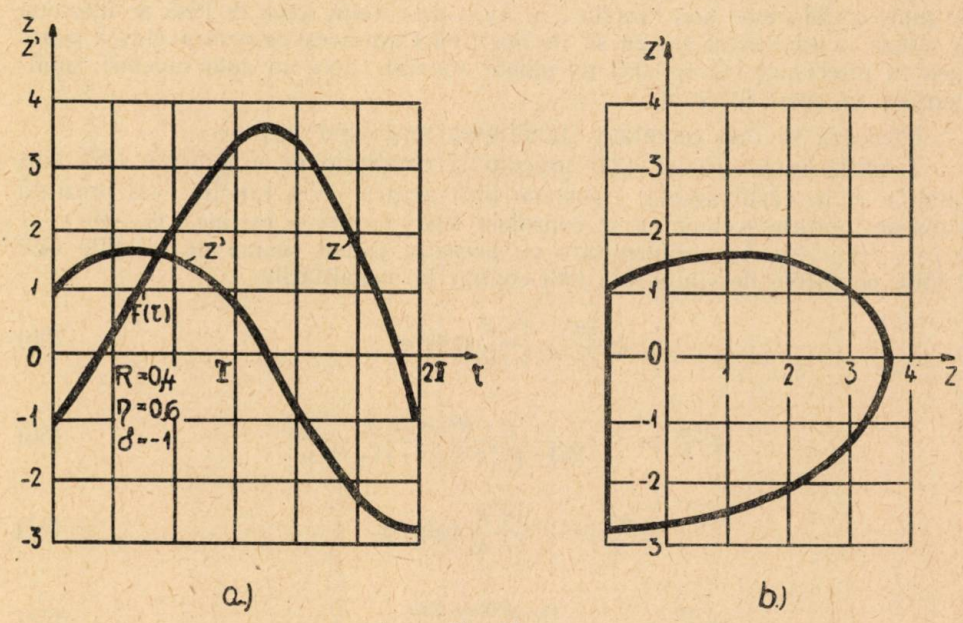


Fig. 10.

Pentru a compara eficacitatea celor două mișcări optime vom calcula raportul dintre viteza de ciocnire maximă (49), ce se obține în cazul excitației dreptunghiulare și viteza de ciocnire maximă (32) ce se obține în cazul excitației armonice

$$\xi = \frac{1-\eta^2}{\eta} \operatorname{tg} \frac{\eta\pi}{2}. \tag{62}$$

Valoarea raportului (62) nu depinde de coeficientul de restituire R numai de η. În fig. 11 s-a reprezentat $\xi=\xi(\eta)$ și din acest grafic rezultă că pentru $\eta \in (0,1)$

avem $\xi > 1$, ceea ce arată că forța de excitație (46) este mai eficace decît excitația armonică. Trebuie avut însă în vedere faptul că mișcarea ce apare în cazul excitației dreptunghiulare nu totdeauna este stabilă.

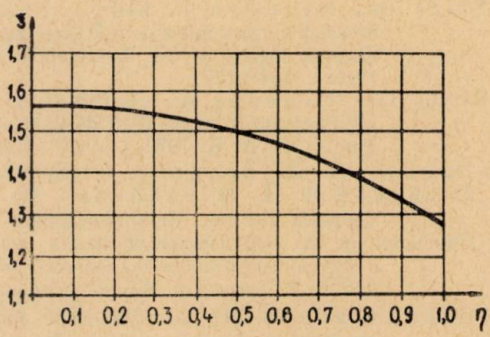


Fig. 11.

5) Concluzii

Din studiul de mai înainte se desprind următoarele concluzii în privința mișcărilor optime ale sistemului vibropercutant din fig. 1.

a) În cazul forței de excitație armonice viteza de ciocnire este maximă dacă ciocnirile au loc în momentele în care forța este nulă. Mișcările optime se pot realiza numai pentru $\eta < 1$ dacă jocul δ are anumite valori date de relația (34) și reprezentate în fig. 3. Mișcarea corespunzătoare este totdeauna stabilă.

b) Forța de excitație optimă în cazul $\eta < 1$ are o variație dreptunghiulară (fig. 6) iar în cazul $\eta > 1$ este constantă pe porțiuni (fig. 7). S-a studiat mai amănunțit mișcarea optimă în cazul $\eta < 1$. Pentru ca viteza de ciocnire să fie maximă și în cazul excitației optime ciocnirile trebuie să aibă loc în momentele în care forța de excitație își schimbă sensul. Pentru aceasta este necesar de asemenea ca jocul să aibă anumite valori date de relația (50) și reprezentate în fig. 8. Viteza de ciocnire ce se obține în aceste condiții este mai mare decît viteza maximă de ciocnire produsă de o excitație armonică (fig .11), însă mișcările corespunzătoare pot fi și instabile.

BIBLIOGRAFIE

1. Беспалова Л. В., К теории виброударного механизма. Изв. АН СССР, ОТН 1957, № 5.
2. Kowalczyk B., Badanie stabilnosci strukturalnej ukladu wibroudrezeniowego o jednym stopniu swobody. Zeszyty Naukowe Politehniki Gdanskiej, Mechanika IX, 1967, Nr. 112 p. 1—27.
3. Silaș Gheorghe, Hegedüs Attila, Studiul mișcărilor periodice ale unui mecanism vibropercutant cu un grad de libertate. Buletinul științific și tehnic al Institutului politehnic Timișoara, Tom 11 (25), Fasc. 2, 1966 p. 403—411.
4. Silaș Gh., Brîndeu L., Stabilitatea mișcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu un grad de libertate în cazul ciocnirilor instantanee elastice. Buletinul științific și tehnic al Institutului politehnic Timișoara, Tom 14 Fasc. 1, 1969 p. 59—66.
5. Быховский И. И., Основы теории вибрационной техники. Изд. Машиностроение, Москва, 1969.
6. Кобринский А. Е., Механизмы с упругими связями. Изд. Наука, Москва, 1964.
7. Brîndeu L., Contribuții privind studiul mișcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante. Teză de doctorat, Timișoara, 1970.

8. Silaş Gh., Hegedüs A., Beitrag zum Studium der periodischen Bewegungen eines Stossschwingers mit einem Freiheitsgrad und zwei Stosspaaren. Dynamika Strojov, Zbornik referatov VI. konferencie o dynamike strojov, Bratislava – Smolenice 1970 p. 164—177.
9. Silaş Gh., Hegedüs A., Contribuţii la studiul mişcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu un grad de libertate. Studii şi cercetări de mecanică aplicată. Tomul 39 Nr. 6, 1970 p. 1433—1449.
10. Баркан Д. Д., Виброметод в строительстве. Москва, 1959 г.
11. Бабицкий В. И., Израйлович М. Я., Об оптимальных движениях виброударных систем. Машиноведение, 1968, №3.
12. Лавендел Э. Э., Оптимальный закон движения лотка с заданными пределами ускорения при вибротранспортировке в режиме с подбрасыванием. Изв. АН СССР, Механика и Машиностроение, 1964, № 6.
13. Израйлович М. Я., Оптимальный закон периодического движения одномассовой виброударной системы. Машиностроение, 1969, № 1, стр. 39—44.
14. Ашавский А. М., Владев М. В., К синтезу оптимальных ударно-вибрационных машин. Динамика машин. Изд. Машиностроение, Москва, 1969, стр. 25—30.
15. Thiele H., Optimierung von Schlagsystemen nach dem Prinzip des elektromagnetischen Linearmotors. Dissertation. Clausthal 1968.
16. Раскин Х. И., Решение задачи оптимального выбора параметров ручных електромолотков. Вопросы Динамики и прочности 14, Изд. «Зинатне», Рига, 1967 г.

BEITRAG ZUM STUDIUM DER OPTIMALEN PERIODISCHEN BEWEGUNGEN VON STOSSSCHWINGSYSTEMEN MIT EINEM FREIHEITSGRAD

(ZUSAMMENFASSUNG)

Für Stossschwingsysteme mit einem Freiheitsgrad und einem Stosspaar werden die periodischen Bewegungen mit maximaler Stossgeschwindigkeit untersucht.

Es werden die Bedingungen bestimmt, für welche bei harmonischer Erregung die Stossgeschwindigkeit maximal ist und es wird gezeigt, dass die optimale Erregung eine bereichsweise konstante Kraft ist.

Aus dem Stabilitätsstudium folgt, dass die optimalen Bewegungen, für welche die Existenzbedingungen erfüllt sind, bei harmonischer Erregung stabil sind, bei optimaler Erregung aber auch instabil sein können.

К ИССЛЕДОВАНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПТИМАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

(РЕЗЮМЕ)

Для виброударных систем с одной степенью свободы и ударной муфтой рассматриваются периодические движения с максимальной скоростью соударений.

Устанавливаются условия при которых скорость соударений максимальна в случае гармонического возбуждения и выводится что оптимальная возбуждающая сила является кусочно-непрерывной. Из рассмотрения устойчивости находим что оптимальные движения для которых проверяются условия существования в случае гармонического возбуждения всегда устойчивы, в то время как при оптимальном возбуждении они могут быть неустойчивыми.

ASUPRA MIŞCĂRII CU SALTURI A UNEI PARTICULE PE O PLATFORMĂ VIBRANTĂ ACŢIONATĂ DE UN GENERATOR DE VIBRAŢII. MIŞCAREA LONGITUDINALĂ

DE

DOINA BECHERESCU

1) Introducere

Mişcarea unei particule materiale pe o platformă vibratoare constituie problema centrală a teoriei vibrotransportului şi vibroseparării.

Mişcarea particulei pe o astfel de platformă mobilă se poate descompune în două componente, una paralelă cu planul vibrator şi una normală la acest plan. Fiecare din aceste componente are un rol bine determinat. Astfel, componenta normală la planul vibrator sau mişcarea transversală determină natura mişcării, iar componenta paralelă cu planul vibrator sau mişcarea longitudinală creează efectul de transport.

Antrenarea platformei mobile se poate se poate realiza în două feluri: 1) cinematic, cînd platforma are o mişcare impusă [1], [2]; [3]; 2) inerţial, cînd mişcarea se realizează sub acţiunea forţelor periodice produse de electromagneţi, generatoare de vibraţii cu excentrice, etc.

În lucrarea [4] s-a introdus un nou model dinamic pentru studiul vibrotransportului care ţine seama şi de modul cum este antrenată platforma. Pentru acest model s-a studiat numai mişcarea transversală determinîndu-se condiţiile de existenţă şi stabilitate ale regimurilor cu zbor continuu ale particulei.

În prezenta lucrare vom studia pentru modelul adoptat şi mişcarea longitudinală a particulei în regim periodic cu zbor continuu.

Modelul dinamic descris [4] constă din platforma de masă M şi masa de ghidare M_1 care alunecă fără frecare de-a lungul unui plan înclinat cu unghiul α pe care se face transportul. Masele M şi M_1 sînt legate între ele prin arcurile avînd constanta elastică k, iar masa M_1 mai este legată printr-un arc de un reper fix, aşezat de-a lungul planului înclinat şi avînd constanta elastică k_1. Generatorul de vibraţii rigid fixat de platformă produce forţa perturbatoare $F(t)$ care este o funcţie periodică cu perioada T şi este înclinată cu unghiul constant β faţă de planul platformei. Ne interesează în studiul mişcării longitudinale numai componenta forţei perturbatoare dirijată de-a lungul planului, pe care o vom nota cu $P(t)=F(t)\cos\beta$.

Fasc. 2/1971. Pag. 39—43.

Buletin şt. şi tehnic al Inst. politehnic Timişoara, Seria Mecanică, Tom 15 (30),

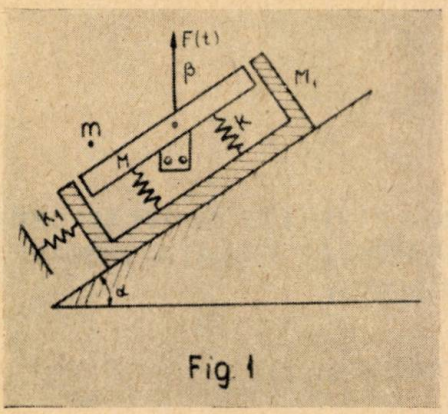


Fig. 1

Particula de masă m se mişcă liber şi se ciocneşte de platformă. Ciocnirea dintre particulă şi platformă se face instantaneu, cu coeficientul de frecare la ciocnire $\lambda(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$.

2) Mişcările periodice ale sistemului vibropercutant.

În continuare se vor studia mişcările periodice longitudinale ale sistemului vibropercutant avînd modelul din fig. 1.

Dacă se notează cu x_1 coordonata platformei măsurată din poziţia nedeformată a arcului k_1, ecuaţia diferenţială a mişcării platformei este

$$(M+M_1)\ddot{x}_1+k_1x_1=P(t)-(M+M_1)g\sin\alpha \tag{1}$$

Ecuaţia diferenţială a mişcării particulei va fi

$$m\ddot{x}=-mg\sin\alpha-m\ddot{x}_1 \tag{2}$$

unde x este coordonata particulei faţă de platforma mobilă.

Prin integrarea ecuaţiilor (1) şi (2) se obţin soluţiile:

$$x_1=C_1\cos\omega_{1n}(t-t_k)+C_2\sin\omega_{1n}(t-t_k)+\frac{1}{\omega_{1n}}\int_{t_k}^{t}p(\tau)\sin\omega_{1n}(t-\tau)d\tau+$$

$$+\frac{g\sin\alpha}{\omega_{1n}^2}\left[\cos\omega_{1n}(t-t_k)-1\right]$$

$$x=C_3+C_4(t-t_k)-x_1(t)-\frac{g\sin\alpha(t-t_k)^2}{2}$$

unde $\omega_{1n}^2=\frac{k_1}{M+M_1}$, $p(t)=\frac{P(t)}{M+M_1}$, $C_i(i=1,2,3,4)$ sînt constantele de integrare, iar t_k este momentul ciocnirii de ordinul k. Constantele de integrare C_i se determină cu condiţiile iniţiale.

În momentul t_k al ciocnirii, coordonatele maselor sînt x_k şi x_{10}, vitezele maselor la începutul ciocnirii sînt $\dot{x}_0$ şi $\dot{x}_{10}$, iar la sfîrşit $\dot{x}_0'$ şi $\dot{x}_{10}'$.

Condiţiile iniţiale ale mişcării între două ciocniri succesive vor fi: $x_1(t_k)=x_{10}$; $x(t_k)=x_k$; $\dot{x}_1(t_k)=\dot{x}_{10}'$ şi $\dot{x}(t_k)=\dot{x}_0'$. Cu ajutorul acestor condiţii se determină cele patru constante de integrare şi legile mişcării sistemului devin

$$x_1=x_{10}\cos\omega_{1n}(t-t_k)+\frac{\dot{x}_{10}'}{\omega_{1n}}\sin\omega_{1n}(t-t_k)+\frac{1}{\omega_{1n}}\int_{t_k}^{t}p(\tau)\sin\omega_{1n}(t-\tau)d\tau+$$

$$+\frac{g\sin\alpha}{\omega_{1n}^2}[\cos\omega_{1n}(t-t_k)-1] \tag{3}$$

$$\dot{x}_1=-\omega_{1n}x_{10}\sin\omega_{1n}(t-t_k)+\dot{x}'_{10}\cos\omega_{1n}(t-t_k)+\int_{t_k}^{t}p(\tau)\cos\omega_{1n}(t-\tau)d\tau-$$

$$-\frac{g\sin\alpha}{\omega_{1n}}\sin\omega_{1n}(t-t_k)$$

și

$$x=-\frac{g\sin\alpha(t-t_k)^2}{2}-x_1(t)+(\dot{x}_0+\dot{x}'_{10})(t-t_k)+x_k+x_{10}$$

$$\dot{x}=-g\sin\alpha\,(t-t_k)-\dot{x}_1(t)+\dot{x}'_0+\dot{x}'_{10} \tag{4}$$

Cu ajutorul ecuațiilor (3) și (4) se pot determina mișcările periodice ale sistemului. Pentru ca să apară un astfel de regim de mișcare, este necesar ca perioada mișcărilor să fie multiplă perioadei T a forței perturbatoare, iar la sfîrșitul intervalului $t_{k+1}=t_k+rT$, sistemul să ajungă astfel încît să fie satisfăcute condițiile: $x_1(t_{k+1})=x_{10}$; $x(t_{k+1})=x_k+x_0$, $\dot{x}_1(t_{k+1})=\dot{x}_{10}$ și $\dot{x}(t_{k+1})=\dot{x}_0$

Ținînd seama de aceste condiții, legile mișcării (3) și (4) devin:

$$x_{10}=x_{10}\cos\omega_{1n}(t_{k+1}-t_k)+\frac{\dot{x}'_{10}}{\omega_{1n}}\sin\omega_{1n}(t_{k+1}-t_k)+\frac{1}{\omega_{1n}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}p(\tau)\sin\omega_{1n}(t_{k+1}-\tau)d\tau+$$

$$+\frac{g\sin\alpha}{\omega_{1n}^2}\left[\cos\omega_{1n}(t_{k+1}-t_k)-1\right]$$

$$\dot{x}_{10}=-\omega_{1n}x_{10}\sin\omega_{1n}(t_{k+1}-t_k)+\dot{x}'_{10}\cos\omega_{1n}(t_{k+1}-t_k)+\int_{t_k}^{t_{k+1}}p(\tau)\cos\omega_{1n}(t_{k+1}-\tau)d\tau-$$

$$-\frac{g\sin\alpha}{\omega_{1n}}\sin\omega_{1n}(t_{k+1}-t_k) \tag{5}$$

și

$$x_k+x_0=-\frac{g\sin\alpha(t_{k+1}-t_k)^2}{2}-x_{10}+(\dot{x}'_{10}+\dot{x}'_{10})(t_{k+1}-t_k)+x_k+x_{10} \tag{6}$$

$$\dot{x}_0=-g\sin\alpha(t_{k+1}-t_k)-\dot{x}_{10}+\dot{x}'_{10}+\dot{x}'_0$$

Ecuațiile (5) și (6) se mai pot pune sub forma:

$$x_{10}(1-\cos\omega_{1n}rT)-\frac{\dot{x}'_{10}}{\omega_{1n}}\sin\omega_{1n}rT+\frac{g\sin\alpha}{\omega_{1n}^2}(1-\cos\omega_{1n}rT)=$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\int_{t_k}^{t_k+1rT}p(\tau)\sin\omega_{1n}(t_{k+1}-\tau)d\tau \tag{7}$$

$$\dot{x}_{10}+\omega_{1n}x_{10}\sin\omega_{1n}rT-\dot{x}'_{10}\cos\omega_{1n}rT+\frac{g\sin\alpha}{\omega_{1n}}\sin\omega_{1n}rT=$$

$$=\int_{t_k}^{t_k+rT}p(\tau)\cos\omega_{1n}(t_{k+1}-\tau)d\tau$$

și

$$0=-\frac{g\sin\alpha\, r^2T^2}{2}-x_0+(\dot{x}'_0+\dot{x}'_{10})rT \tag{8}$$

$$\dot{x}_0=-g\sin\alpha rT-\dot{x}_{10}+\dot{x}'_0+\dot{x}'_{10}$$

Ținînd seama că ciocnirea longitudinală este instantanee și se face cu coeficientul de frecare la ciocnire λ ($\lambda\neq 0$) între vitezele de ciocnire există relația

$$\dot{x}'_0=(1-\lambda)\dot{x}_0 \tag{9}$$

Prin aplicarea teoremelor ciocnirii se poate arăta că variația impulsului pe direcția longitudinală este nulă.

Astfel, dacă se ține seama și de relația (9), mai rezultă

$$\dot{x}'_{10}=\frac{m\lambda\dot{x}_0+(m+M+M_1)\dot{x}_{10}}{m+M+M_1} \tag{10}$$

Aceste relații între vitezele longitudinale de ciocnire generalizează pe cele date de Blehman I.I. [1] și pot fi verificate experimental [5]. Din ecuațiile (7), (8) și relațiile (9), (10) se pot calcula parametrii $\dot{x}'_0$, $\dot{x}_0$, $\dot{x}'_{10}$, $\dot{x}_{10}$, x_0 și x_{10}. Astfel din ecuațiile (8) rezultă

$$\dot{x}'_0+\dot{x}'_{10}=\frac{x_0}{rT}+\frac{rT\,g\sin\alpha}{2} \tag{11}$$

și

$$\dot{x}_0+\dot{x}_{10}=-\frac{x_0}{rT}-\frac{rT\,g\sin\alpha}{2} \tag{12}$$

Adunînd relațiile (9) și (10) se obține:

$$\dot{x}'_{10}+\dot{x}'_0=\dot{x}_{10}+\dot{x}_0-\frac{\lambda(M+M_1)}{m+M+M_1}\dot{x}_0 \tag{13}$$

în care înlocuind sumele (11) și (12) rezultă

$$\dot{x}_0=-\frac{g\sin\alpha rT\,(m+M+M_1)}{\lambda\,(M+M_1)} \tag{14}$$

Introducînd expresia lui $\dot{x}_0$ în relația (9) se obține

$$\dot{x}'_0 = -\frac{(1-\lambda)g \sin \alpha rT (m+M+M_1)}{\lambda (M+M_1)} \tag{15}$$

Introducînd apoi expresiile lui $\dot{x}_0$ și $\dot{x}_0$ în relațiile (11) și (12) se obțin parametrii :

$$\dot{x}_{10} = \frac{x_0}{rT} + \frac{g \sin \alpha rT}{2\lambda (M+M_1)} [2m+(M+M_1)(2-\lambda)] \tag{16}$$

și

$$\dot{x}'_{10} = \frac{x_0}{rT} + \frac{g \sin \alpha rT}{2\lambda (M+M_1)} [2m (1-\lambda)+(M+M_1)(2-\lambda)] \tag{17}$$

Coordonatele x_0 și x_{10} se determină din sistemul de ecuații (7) care după înlocuirea parametrilor $\dot{x}_0$, $\dot{x}_0$, $\dot{x}_{10}$, $\dot{x}'_{10}$, devine :

$$\left(x_{10}+\frac{g \sin \alpha}{\omega_{1n}^2}\right)(1-\cos\omega_{1n}rT) - \frac{x_0}{rT}\frac{\sin \omega_{1n}rT}{\omega_{1n}} - \frac{\sin \omega_{1n}rT}{\omega_{1n}}\frac{g \sin \alpha rT}{2\lambda (M+M_1)}[2m (1-\lambda)+$$

$$+(M+M_1)(2-\lambda)] = \frac{1}{\omega_{1n}}\int_{t_k}^{t_k+rT} p(\tau)\sin\omega_{1n}(t_{k+1}-\tau)d\tau \tag{18}$$

$$\left(x_{10}+\frac{g \sin\alpha}{\omega_{1n}^2}\right)\sin\omega_{1n}pT + \frac{x_0}{rT}\frac{1-\cos\ \omega_{1n}rT}{\omega_{1n}} - \frac{\cos\ \omega_{1n}rT}{\omega_{1n}}\frac{g \sin \alpha rT}{2\lambda (M+M_1)}[2m(1-\lambda)+$$

$$+M+M_1)(2-\lambda)] + \frac{g \sin \alpha}{2\omega_{1n}\lambda (M+M_1)}]2m+(M+M_1)(2-\lambda)] =$$

$$= \frac{1}{\omega_{1n}}\int_{t_k}^{t_k+rT} p(\tau)\cos\omega_{1n}(t_{k+1}-\tau)d\tau$$

Din acest sistem eliminînd pe x_{10} rezultă expresia vitezei medii de transport $V_{med} = \frac{x_0}{rT}$ și anume

$$V_{med} = -\frac{g \sin \alpha rT (2-\lambda) (m+M+M_1)}{2\lambda (M+M_1)} -$$

$$-\frac{1}{2 \sin \frac{\omega_{1n}rT}{2}}\int_{t_k}^{t_k+rT} p(\tau)\sin\omega_{1n}(t_n+rT-\tau)d\tau \tag{19}$$

momentele t_k fiind determinate din studiul mișcării transversale [4].

3. Stabilitatea mișcărilor periodice.

S-au determinat anterior condițiile în care se realizează mișcările periodice longitudinale precum și parametrii mișcării. Pentru ca aceste mișcări să se realizeze efectiv este necesar să se determine condițiile în care ele sînt și stabile.

Studiul stabilității se face prin metoda perturbațiilor. Se va considera ca la o anumită ciocnire parametrii mișcării diferă puțin de valorile determinate pentru mișcarea periodică. Momentele t_k ($k=1, 2 \ldots .$) rezultă studiind mișcarea transversală și atunci cînd această mișcare este stabilă perturbațiile Δt_k tind la zero. Deoarece interesează mișcările periodice stabile, în continuare nu mai este necesar să se perturbe și momentele ciocnirilor. Astfel, la sfîrșitul ciocnirii de ordinul k parametrii mișcării periodice x_{10}, x_0, $\dot{x}_0$, $\dot{x}_{10}$ vor avea perturbațiile Δx_{1k}, Δx_k, $\Delta \dot{x}_{1k}$, $\Delta \dot{x}_k$, iar la începutul ciocnirii următoare: Δx_{1k+1}, Δx_{k+1}, $\Delta \dot{x}_{1k+1}$ și $\Delta \dot{x}_{k+1}$.

Legile mișcării perturbate vor avea aceiași formă ca în mișcarea periodică (3) și (4), numai că parametrilor mișcării trebuie să li se aplice perturbații. Pentru sfîrșitul intervalului, $t_{k+1}=t_k+rT$ din legile mișcării perturbate se obțin următoarele relații:

$$x_{10}+\Delta x_{1k+1}=(x_{10}+\Delta x_{1k})\cos\omega_{1n}rT+\frac{\dot{x}'_{10}+\Delta\dot{x}'_{1k}}{\omega_{1n}}\sin\omega_{1n}rT+$$

$$+\frac{g\sin\alpha}{\omega_{1n}^2}(\cos\omega_{1n}rT-1)+\frac{1}{\omega_{1n}}\int_{t_k}^{t_k+rT}p(\tau)\sin\omega_{1n}(t_{k+1}-\tau)d\tau \qquad (20)$$

$$\dot{x}_{10}+\Delta\dot{x}_{1k+1}=-\omega_{1n}(x_{10}+\Delta x_{1k})\sin\omega_{1n}rT+(\dot{x}'_{10}+\Delta\dot{x}'_{1k})\cos\omega_{1n}rT$$

$$-\frac{g\sin\alpha}{\omega_{1n}^2}\sin\omega_{1n}rT+\int_{t_k}^{t_k+rT}p(\tau)\cos\omega_{1n}(t_{k+1}-\tau)d\tau$$

și

$$\Delta x_{k+1}=-\frac{g\sin\alpha}{2}r^2T^2-x_0-\Delta x_{1k+1}+(\dot{x}'_0+\Delta\dot{x}'_k+\dot{x}'_{10}+\Delta\dot{x}'_{1k})rT+\Delta x_k+\Delta x_{1k}$$

$$\dot{x}_0+\Delta\dot{x}_{k+1}=-g\sin\alpha rT-\dot{x}_{10}-\Delta\dot{x}_{1k}+\dot{x}'_0+\Delta\dot{x}'_k+\dot{x}'_{10}+\Delta\dot{x}'_{1k} \qquad (21)$$

Perturbațiile $\Delta\dot{x}'_{1k}$ și $\Delta\dot{x}'_k$ se calculează cu ajutorul formulelor (9) și (10) unde în locul vitezelor se introduc perturbațiile $\Delta\dot{x}_{1k}$ și $\Delta\dot{x}_k$. Observînd că părțile finite din relațiile (20) și (21) sînt chiar condițiile (7) și (8), rezultă ecuațiile în perturbații sub forma:

$$-\omega_{1n}\Delta x_{1k+1}+\omega_{1n}\Delta x_{1k}\cos\omega_{1n}rT+\Delta\dot{x}_{1k}\sin\omega_{1n}rT+\frac{m\lambda}{m+M+M_1}\sin\omega_{1n}rT\Delta\dot{x}_k=0$$

$$-\Delta\dot{x}_{1k+1}+\Delta\dot{x}_{1k}\cos\omega_{1n}rT+\frac{m\lambda}{m+M+M_1}\cos\omega_{1n}rT-\omega_{1n}\sin\omega_{1n}rT\Delta x_{1k}=0 \qquad (22$$

și

$$rT\Delta\dot{x}_{1k}+\frac{m\lambda}{m+M+M_1}\Delta\dot{x}_k+(1-\lambda)rT\Delta\dot{x}_k-\Delta x_{k+1}+\Delta x_k-\Delta x_{1k+1}-\Delta x_{1k}=0$$

$$\Delta\dot{x}_{1k+1}+\Delta\dot{x}_{k+1}-(1-\lambda)\Delta\dot{x}_k-\Delta\dot{x}_{1k}-\frac{m\lambda}{m+M+M_1}\Delta\dot{x}_k=0 \tag{23}$$

După cum se vede avem perturbația Δx_k numai în prima dintre ecuațiile (23). Deci este suficient să se considere în continuare numai ecuațiile (22) și a doua ecuație (23).

Sistemul de trei ecuații cu diferențe finite considerat se rezolvă considerînd soluțiile de forma

$$\Delta\dot{x}_{1k}=U\beta^k, \quad \Delta\dot{x}_k=V\beta^k; \quad \Delta x_{1k}=Z\beta^k \tag{24}$$

După înlocuirea soluțiilor (24) se obține un sistem de ecuații liniare și omogene în raport cu U, V, Z și anume

$$\begin{aligned}&\sin bU+a\sin bV+\omega_{1n}(\cos b-\beta)Z=0\\&(\cos b-\beta)U+a\cos bV-\omega_{1n}\sin bZ=0\\&(\beta-1)U+[\beta-(a+1-\lambda)]V=0\end{aligned} \tag{25}$$

unde s-a notat $a=\frac{m\lambda}{m+M+M_1}$, $b=\omega_{1n}rT$

Pentru ca sistemul (25) să admită soluții nenule trebuie să avem

$$\begin{vmatrix}\sin b & a\sin b & (\cos b-\beta)\\ \cos b-\beta & a\cos b & -\sin b\\ \beta-1 & \beta-(a+1-\lambda) & 0\end{vmatrix}=0$$

Dezvoltînd acest determinant se obține ecuația caracteristică de ordinul trei în β care se poate scrie

$$\beta^3+a_1\beta^2+a_2\beta+a_3=0 \tag{26}$$

unde

$$\begin{aligned}a_1&=a\cos b-2\cos b-a-1+\lambda\\a_2&=1-a+a\cos b+2\cos b-2\lambda\cos b\\a_3&=-(1-\lambda)\end{aligned}$$

Din ecuația caracteristică (26) rezultă condițiile de stabilitate a mișcărilor periodice. Dacă toate rădăcinile ecuației (24) sînt în modul subunitare, mișcările periodice vor fi asimptotic stabile. În caz că există o rădăcină în

modul mai mare decît unitatea, mișcările periodice sînt nestabile. Deci condițiile de stabilitate coincid cu condițiile ca rădăcinile ecuației (26) să fie în modul subunitare. Aceste condiții rezultă aplicînd criteriul lui Schurr [6]. Condițiile de stabilitate date de criteriul lui Schur sînt exprimate prin coeficienții ecuației (26) sub forma

$$|a_3| < 1, \quad \left|\frac{a_2 - a_1 a_3}{1 - a_3^2}\right| < 1, \quad \left|\frac{a_1 - a_2 a_3}{(1 - a_3^2) + (a_2 - a_1 a_3)}\right| < 1 \tag{27}$$

După cum se constată, $a_3 = -(1-\lambda)$ este în modul subunitar dacă $\lambda < 1$. Presupunînd $\lambda \neq 0$, din condiția

$$-1 < 1 - \frac{a(1-\cos b)}{\lambda} < 1$$

se obțin inegalitățile

$$\begin{aligned} a(1-\cos b) &> 0 \\ a(1-\cos b) &< 2\lambda \end{aligned} \tag{28}$$

Ultima din condițiile (27) are forma:

$$-1 < 1 + \frac{2\lambda(1+\cos b)}{a(1-\cos b) - \lambda} < 1$$

și conduce la inegalitățile:

$$\begin{aligned} \lambda(1+\cos b) &> 0 \\ (\lambda - a)(1-\cos b) &> 0 \end{aligned} \tag{29}$$

Prima inegalitate (28) și prima inegalitate (29) sînt îndeplinite pentru orice valoare a lui $b \neq 2l\pi$, (l întreg) și $\lambda > 0$.

Deoarece $\frac{2\lambda}{1-\cos b} = \frac{\lambda}{\sin^2 \frac{b}{2}} \geqslant \lambda$, celelalte două condiții sînt verificate pentru valorile

$$a < \lambda$$

Ținînd seama că $a = \frac{m\lambda}{m + M + M_1}$, această inegalitate se observă că este întotdeauna îndeplinită.

În concluzie, mișcările periodice pe direcția longitudinală pentru valorile $0 < \lambda < 1$ sînt întotdeauna stabile.

4) **Cazul excitării cinematice a platformei.**

Acest caz studiat în lucrările [2] [3] se găsește considerînd masa platformei foarte mare în raport cu masa particulei și admițînd că platforma execută o mișcare periodică impusă.

Parametrii mișcării periodice și condițiile de stabilitate, atunci cînd mărimile $\omega_{1n}^2 = \frac{k_1}{M+M_1}$ și $\mu_1 = \frac{m}{M+M_1}$ tind la zero, trec la limită în relațiile corespunzătoare din lucrarea [3].

Astfel viteza $\dot{x}_0$ dată de relația (14) prin trecere la limită devine:

$$\dot{x}_0 = -\frac{rT\, g \sin\alpha}{\lambda} \tag{14'}$$

Viteza medie de transport $V_{med} = \frac{x_0}{rT}$ din relația (19), prin trecere la limită se mai poate scrie:

$$V_{med} = -\frac{rTg \sin\alpha\,(2-\lambda)}{2\lambda} - \frac{1}{rT}\int_{t_k}^{t_k+rT} p\,(\tau)(t_k + \frac{rT}{2} - \tau)\,d\tau.$$

Vom presupune că platforma execută o mișcare periodică impusă după legea $x_1 = \xi\,(t)$ [1], atunci $p\,(t) = \dot{\xi}\,(t)$. Astfel viteza medie este:

$$V_{med} = -\frac{rTg \sin\alpha\,(2-\lambda)}{2\lambda} + \dot{\xi}(t_k). \tag{19'}$$

Ecuația caracteristică (26) ținînd seama că a și b tind la zero va fi

$$\beta^3 + (\lambda - 3)\,\xi^2 + (3 - 2\lambda)\,\beta - (1-\lambda) = 0. \tag{26'}$$

După cum se constată ecuația (26') are rădăcina $\beta = 1-\lambda$, precum și o rădăcină dublă egală cu unitatea.

Deși aceasta ar corespunde unui caz critic, se poate ușor arăta că în cazul excitării cinematice mișcarea este în general stabilă. Într-adevăr, mișcarea platformei fiind impusă $\Delta x_{1k} = 0$ și $\Delta \dot{x}_{1k} = 0$ sau $U = Z = 0$, ceea ce înseamnă că din ecuațiile (25) rămîne doar ecuația

$$[\beta - (1-\lambda)]\,V = 0$$

care are rădăcina $\beta = 1-\lambda < 1$. Astfel, s-a regăsit observația din lucrarea [2] care arată că studiul stabilității mișcării longitudinale a particulei cînd excitația platformei este cinematică se reduce de fapt la studiul stabilității vitezei relative.

BIBLIOGRAFIE

1. Blehman I. I., Djanelidze G. Iu.: Vibraţionoe peremeşcenie. Izd. Nauka Moskva 1964.
2. Lavendel E. E.: Optimalnîi zakon dvijenia lotka s zadannîmi predelami uskorenia pri vibrotransportirovke v rejime s podbrasîvaniem. Izv. AN SSSR, Mehanika i maşinostroenie, Nr. 6 1964.
3. Becherescu Doina, Hegedüs A.: Studiul mişcărilor vibropercutante ale unei particule sub excitaţie periodică. Studii şi cercetări matematice, tom. 22, fasc. 3, 1970.
4. Becherescu Doina: Asupra mişcării cu salturi ale unei particule pe o platformă vibrantă acţionată de un generator de vibraţii. Mişcarea transversală. Bul. Şt. şi tehnic al Inst. politehnic Timişoara Seria mat.-fiz.-mecanică teoretică şi aplicată, tom. 15/29 fasc. 2, 1970.
5. Klimovici V. U.: O vosstanovlenii kasatelnogo impulsa pri udare bez skoljenia, Izv. AN SSSR, OTN, Mehanika i maşinostroenie, Nr. 2, 1962.
6. Kobrinski A. E.: Mehanizmî s uprughimi sviaziami. Izd. Nauka Moskva, 1964.

ÜBER DIE BEWEGUNGEN MIT SPRÜNGEN EINES MATERIELLEN PUNKTES AUF EINER DURCH EINEN SCHWINGUNGSERREGER BETRIEBENEN PLATTFORM. LÄHGSBEWEGUNG

(ZUSAMMENFASSUNG)

Es wird ein dynamisches Model zum Studium von Schwingförderung angenommen, welches aus einem materiellen Punkt besteht, welcher sich mit Sprüngen auf einer Plattform bewegt, welche mit der horizontalen Richtung den Winkel α bildet. Die Schwingungen der Plattform werden durch einen Schwingungserreger erzeugt, die Erregerkraft bildet den Winkel β mit der Plattformebene.

Es werden die periodischen Längsbewegungen dieses Stosschwingsystems bestimmt und ihre Stabilität mit der Störungsrechnung untersucht.

Die Ergebnisse werden für den Fall einer Plattform mit kinematischem Antrieb partikularisiert.

К ДВИЖЕНИЮ ЧАСТИЦЫ С ПОДПРЫГИВАНИЕМ НА ПЛОЩАДКЕ ВОЗБУЖДАЕМОЙ ВИБРОГЕНЕРАТОРОМ. ПРОДОЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ.

(РЕЗЮМЕ)

Приводится динамическая модель для исследования вибротранспортера, состоящая из материальной частицы движущейся с подпригиванием на площадке наклонной под углом α к горизонту. Виброплощадка приводится в действие при помощи генератора, а возмущающая сила наклонена под углом β к площадке.

Устанавливаются продольные периодические движения виброударного механизам и исследуется их устойчивость методом возмущений.

Результаты применяются к частному случаю кинематического привода площадки.

STABILITATEA MIȘCĂRILOR PERIODICE ALE UNUI SISTEM CU CARACTERISTICA BILINIARĂ.

DE

L. BRÎNDEU

În categoria sistemelor neliniare intră obișnuit și cele cu caracteristica liniară pe porțiuni. Studiul mișcărilor periodice ce pot să apară în astfel de sisteme, se poate face la fel ca și în cazul sistemelor vibropercutante.

Un astfel de studiu, pentru sistemul cu un grad de libertate supus unei excitații armonice, a fost făcut de S. A. Osmakov și O. A. Savinov [1]. După cum s-a arătat însă ulterior, în lipsa amortizării, pe această bază nu rezultă condițiile în care mișcările periodice sînt asimptotic stabile [2]. Studiul aproximațiilor de ordin superior este însă mai dificil.

Ținînd seama de amortizarea ce există întotdeauna în sistemele mecanice, se pot obține imediat condițiile de stabilitate.

Toate rezultatele prezentate în această lucrare precum și metoda directă folosită pentru obținerea lor, se află în teza de doctorat pe care am elaborat-o sub conducerea prof. Gh. Silaș [3]. Prin folosirea metodei directe, condițiile de stabilitate se obțin mult mai simplu și corect chiar dacă excitația este periodică nearmonică.

Sistem cu limitator elastic și amortizare

Se consideră un sistem elastic cu un grad de libertate format dintr-o masă fixată la o extremitate a arcurilor cu constanta elastică k_1 (fig. 1). Asupra masei acționează o forță perturbatoare periodică $Q(t)$ avînd perioada T, și un sistem amortizor cu coeficientul de amortizare c. Masa m se mișcă pe verticală ajungînd să se sprijine și pe un limitator ce constă din arcurile cu constanta elastică $k_2 - k_1$. Astfel mișcarea periodică a masei se face cu salturi de pe arcul limitatorului încît fie că se deplasează împreună cu limitatorul, fie separat.

Poziția masei m se determină cu ajutorul coordonatei q, iar a limitatorului în repaus prin q_0. Deoarece limitatorul nu are masă, dacă este liber el se oprește întotdeauna instantaneu în poziție de repaus.

Ecuația diferențială a mișcării se poate pune sub forma:

$$\ddot{q} + \varphi(\dot{q}, q) = Q(t) \qquad (1)$$

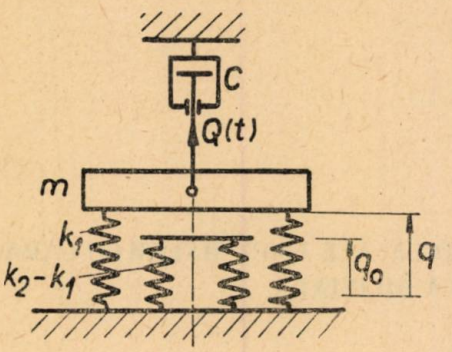


Fig. 1.

unde

$$\varphi(\dot{q},q)=\begin{cases}\frac{c}{m}\dot{q}+\frac{k_1}{m}q & \text{ptr. } q\geqslant q_0\\ \frac{c}{m}\dot{q}+\frac{k_2}{m}q+\frac{k_1-k_2}{m} & \text{ptr. } q\leqslant q_0\end{cases} \tag{1'}$$

După cum se observă, în momentele ce corespund la $q=q_0$, are loc trecerea de pe o parte a caracteristicii pe cealaltă și invers. Este evident că și soluția se va exprima diferit corespunzător celor două porțiuni ale caracteristicii.

Astfel perioada mișcării, multiplă celei cunoscute a forței perturbatoare adică rT ($r=1, 2, \ldots,$), se împarte în două intervale deosebite unde legile mișcării periodice, $\bar{q}_1=\bar{q}_1(t)$ pentru $q\geqslant q_0$ și $\bar{q}_2=\bar{q}_2(t)$ pentru $q\leqslant q_0$ se presupun determinate.

Într-o anumită perioadă a mișcării cu durata $t_{k+1}-t_k=rT$ legile mișcării trebuie să verifice condițiile inițiale

$$\bar{q}_1(t_k)=q_0\,;\quad \dot{\bar{q}}_1(t_k)=\dot{q}_c \tag{2}$$

și pe cele finale

$$\bar{q}_2(t_{k+1})=q_0\,;\quad \dot{\bar{q}}_2(t_{k+1})=\dot{q}_c. \tag{3}$$

În momentul $t=\tau_k$; $(t_k<\tau_k<t_{k+1})$ de trecere de la un interval la următorul trebuie să fie îndeplinite condițiile

$$\bar{q}_1(\tau_k)=\bar{q}_2(\tau_k)=q_0\,;\quad \dot{\bar{q}}_1(\tau_k)=\dot{\bar{q}}_2(\tau_k). \tag{4}$$

Constantele de integrare din legile mișcării au fost calculate cu ajutorul condițiilor inițiale (2) respectiv finale (3). Din condițiile de trecere (4) se determină parametrii mișcării periodice $\dot{q}_c$, t_k, și τ_k ($k=1, 2, \ldots,$).

Metodă directă pentru studiul stabilității.

Metoda directă care a fost dezvoltată pentru studiul stabilității mișcării sistemelor vibropercutante [3] se poate aplica și în aceste cazuri.

Presupunînd că inițial parametrii mișcării periodice au suferit perturbații mici, acestea trebue să existe și în continuare. Legea mișcării perturbate va fi

$$q_i=\bar{q}_i+x_i \quad (i=1, 2) \tag{5}$$

unde x_i ($i=1, 2$) reprezintă variațiile acestora în cele două intervale ale unei perioade.

Ecuația în variații, pentru perturbații mici, se poate scrie

$$\ddot{x}_i+\frac{\partial\bar{\varphi}_i}{\partial\dot{q}_i}\dot{x}_i+\frac{\partial\bar{\varphi}_i}{\partial q_i}x_i=0 \qquad (i=1,\ 2) \tag{6}$$

unde

$$\bar{\varphi}_i=\varphi_i\ (\dot{\bar{q}}_i,\ \bar{q}_i)\ ; \qquad (i=1,\ 2).$$

În mișcarea perturbată condițiile inițiale (2) devin

$$q_1(t_k+\Delta t_k)=q_0\ ;\ \dot{q}_1(t_k+\Delta t_k)=\dot{q}_c+\Delta\dot{q}_k \tag{7}$$

iar cele finale

$$q_2(t_{k+1}+\Delta t_{k+1})=q_0\ ;\ \dot{q}_2(t_{k+1}+\Delta t_{k+1})=\dot{q}_c+\Delta\dot{q}_{k+1}. \tag{8}$$

De asemenea condițiile de trecere (4) în mișcarea perturbată sînt de forma

$$q_1(\tau_k+\Delta\tau_k)=q_2(\tau_k+\Delta\tau_k)=q_0\ ;\ \dot{q}_1(\tau_k+\Delta\tau_k)=\dot{q}_2(\tau_k+\Delta\tau_k) \tag{9}$$

Ținînd seama de legile mișcării (5) și condițiile (2), (3), (4) din mișcarea periodică, condițiile (7), (8), (9) devin

$$x_1(t_k+\Delta t_k)=\bar{q}_1(t_k+\Delta t_k)-\bar{q}_1(t_k)\ ;\quad \dot{x}_1(t_k+\Delta t_k)=\Delta\dot{q}_k-\dot{\bar{q}}_1(t_k+\Delta t_k)+\dot{\bar{q}}_1(t_k)$$

$$x_2(t_{k+1}+\Delta t_{k+1})=-\bar{q}_2(t_{k+1}+\Delta t_{k+1})+\bar{q}_2(t_{k+1})\ ;\ \dot{x}_2(t_{k+1}+\Delta t_{k+1})=\Delta\dot{q}_{k+1}-$$

$$-\dot{\bar{q}}_2(t_{k+1}+\Delta t_{k+1})+\dot{\bar{q}}_2(t_{k+1})$$

$$x_1(\tau_k+\Delta\tau_k)-x_2(\tau_k+\Delta\tau_k)=\bar{q}_2(\tau_k+\Delta\tau_k)-\bar{q}_1(\tau_k+\Delta\tau_k) \tag{10}$$

$$\dot{x}_1(\tau_k+\Delta\tau_k)-\dot{x}_2(\tau_k+\Delta\tau_k)=\dot{\bar{q}}_2(\tau_k+\Delta\tau_k)-\dot{\bar{q}}_1(\tau_k+\Delta\tau_k).$$

Din dezvoltările în serii de puteri ce se fac în relațiile (10), este suficient să se rețină numai termenii liniari în perturbații. Ținînd seama că variațiile $x_i(i=1,2)$ sînt de același ordin de mărime ca și perturbațiile mici considerate, pentru variații se obțin condițiile inițiale

$$x_1(t_k)=-\dot{q}_c\Delta t_k, \qquad \dot{x}_1(t_k)=\Delta\dot{q}_k-\ddot{q}_c\Delta t_k \tag{11}$$

și cele finale

$$x_2(t_{k+1})=-\dot{q}_c\Delta t_{k+1}, \qquad \dot{x}_2(t_{k+1})=\Delta\dot{q}_{k+1}-\ddot{q}_c\Delta t_{k+1}. \tag{12}$$

Accelerațiile $\ddot{q}_1(t_k)=\ddot{q}_c$ și $\ddot{q}_2(t_{k+1})=\ddot{q}_c$ se calculează cu ajutorul ecuației diferențiale (1).

În mod asemănător se obțin condițiile de trecere

$$x_1(\tau_k)=x_2(\tau_k)\ ;\ \dot{x}_1(\tau_k)=\dot{x}_2(\tau_k). \tag{13}$$

Condițiile de stabilitate se pot scrie chiar și în cazul cînd legile mișcării nu sînt efectiv determinate. Se integrează ecuațiile diferențiale în variații (6) și apoi se determină constantele de integrare din condițiile inițiale (11), respectiv finale (12). Dacă se introdic soluțiile astfel obținute în condițiile de trecere (13) rezultă ecuațiile linearizate în perturbații necesare scrierii condițiilor de stabilitate.

Determinarea condițiilor de stabilitate.

Pentru sistemul din fig. 1 avînd ecuația diferențială (1) cu notațiile (1'), ecuațiile în variații vor fi :

$$m\ddot{x}_1+c\dot{x}_1+k_1x_1=0 \tag{14}$$

și

$$m\ddot{x}_2+c\dot{x}_2+k_2x_2=0. \tag{15}$$

În funcție de natura rădăcinilor ecuațiilor caracteristice ce corespund ecuațiilor diferențiale (14) și (15), există mai multe cazuri de studiat. Dintre acestea se va prezenta detaliat, în continuare, numai cazul

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2<\frac{k_1}{m},\quad (k_1<k_2). \tag{16}$$

La integrarea acestor ecuații se folosesc condițiile inițiale (11), finale (12) și cele de trecere (13).

Soluția generală a primei ecuații (14) valabilă în primul interval al perioadei este

$$x_1=e^{-\frac{c}{2m}(t-t_k)}\left[X_{11}\cos p_1(t-t_k)+X_{21}\sin p_1(t-t_k)\right] \tag{17}$$

unde $p_1=\sqrt{\frac{k_1}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}$. Constantele de integrare X_{11}, X_{21} determinate din condițiile inițiale (11) au valorile

$$X_{11}=-c\Delta t_k,\quad X_{21}=\frac{1}{p_1}\left[\Delta\dot{q}_k-\left(\frac{c}{2m}\dot{q}_c+\ddot{q}_c\right)\Delta t_k\right] \tag{17'}$$

Pentru ecuația (15) valabilă în celălalt interval al perioadei, soluția generală se va scrie

$$x_2=e^{\frac{c}{2m}(t_{k+1}-t)}\left[X_{12}\cos p_2(t_{k+1}-t)+X_{22}\sin p_2(t_{k+1}-t)\right] \tag{18}$$

unde $p_2=\sqrt{\frac{k_2}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}$. Din condițiile finale (12) se calculează constantele de integrare X_{12} și X_{22} a căror expresie este

$$X_{12}=-\dot{q}_c\Delta t_{k+1}, \quad X_{22}=\frac{1}{p_1}\left[-\Delta\dot{q}_{k+1}+\left(\frac{c}{2m}\dot{q}_c+\ddot{q}_c\right)\Delta t_{k+1}\right] \tag{18'}$$

Din ecuațiile de trecere (13) și soluțiile (17), (18), se obțin cele două ecuații liniarizate în perturbații. Acest sistem de ecuații cu diferențe finite se poate rezolva considerînd soluții de forma

$$\Delta\dot{q}_k=v\beta^k, \quad \Delta t_k=\theta\beta^k, \quad (k=1,\ 2,\ \ldots) \tag{19}$$

Pentru simplificarea calculelor se va introduce funcția auxiliară

$$G(t)=\frac{1}{p_1}e^{-\frac{c}{2m}(t-t_k)}\sin p_1(t-t_k)+\frac{\beta}{p_2}e^{\frac{c}{2m}(t_{k+1}-t)}\sin p_2(t_{k+1}-t). \tag{20}$$

Astfel din ecuațiile liniarizate în perturbații se obține un sistem liniar și omogen în v și θ avînd forma

$$\begin{aligned} G(\tau_k)\left[v-\left(\frac{c}{m}\dot{q}_c+\ddot{q}_c\right)\theta\right]&=\dot{G}(\tau_k)\dot{q}_c\theta \\ \dot{G}(\tau_k)\left[v-\left(\frac{c}{m}\dot{q}_c+\ddot{q}_c\right)\theta\right]&=\ddot{G}(\tau_k)\dot{q}_c\theta \end{aligned} \tag{21}$$

Acest sistem admite soluțiile nenule pentru v și θ, dacă este îndeplinită condiția

$$\dot{G}^2(\tau_k)=G(\tau_k)\ddot{G}(\tau_k). \tag{22}$$

Ținînd seama de expresia (20), condiția (22) reprezintă ecuația caracteristică în β a sistemului și se mai poate scrie

$$\beta^2-2e^{-\frac{c}{2m}rT}N(\xi_1,\ \xi_2)\beta+e^{-\frac{c}{m}rT}=0 \tag{23}$$

unde

$$N(\xi_1,\ \xi_2)=\cos\xi_1\cos\xi_2-\frac{p_1^2+p_2^2}{2p_1p_2}\sin\xi_1\sin\xi_2 \tag{23'}$$

$$\xi_1=p_1(\tau_k-t_k)\ ;\ \xi_2=p_2(t_{k+1}-\tau_k).$$

Cum perioada mișcării este $t_{k+1} - t_k = rT$, între mărimile ξ_1 și ξ_2 trebuie să existe relația

$$\frac{\xi_1}{p_1} + \frac{\xi_2}{p_2} = rT.$$

Ecuația (23) de gradul doi în β este ecuația caracteristică a sistemului. Pentru ca mișcările periodice considerate să fie stabile este necesar ca rădăcinile ecuației caracteristice (23) să fie în modul subunitare. Aceasta se poate verifica folosind de exemplu criteriul lui Schur [4].

Una dintre condițiile ce trebuie să fie verificate pentru ca mișcarea să fie stabilă este

$$e^{-\frac{c}{m}rT} < 1 \tag{24}$$

După cum se constată această condiție este întodeauna verificată dacă există amortizare, deci $c>0$. În particular, este verificată chiar dacă amortizarea este mică.

De asemenea mai trebuie să fie verificate inegalitățile

$$-(1+e^{-\frac{c}{m}rT}) < 2e^{-\frac{c}{2m}rT} N(\xi_1, \xi_2) < 1+e^{-\frac{c}{m}rT} \tag{25}$$

Așa cum se constată, pentru un sistem amortizat inegalitățile (25) reprezintă, de fapt, condițiile de stabilitate ale mișcărilor periodice.

Analiza acestor inegalități se va face considerînd ca variabile pe ξ_1 și ξ_2 iar ca parametru pe c. De fapt mărimile ξ_1 și ξ_2 depind de valorile lui c și de acest lucru trebuie să se țină seama atunci cînd se aplică rezultatele obținute.

În general domeniile de stabilitate depind de valorile parametrului c, atît direct cît și prin intermediul variabilelor ξ_1 și ξ_2. Există totuși porțiuni ale domeniilor de stabilitate care depind direct numai de ξ_1 și ξ_2.

Din inegalitățile (25) prin transformări simple se obține

$$2e^{-\frac{c}{2m}rT}(N-1) < (1-e^{-\frac{c}{2m}rT})^2$$

precum și

$$-(1-e^{-\frac{c}{2m}rT})^2 < 2e^{-\frac{c}{2m}rT}(N+1).$$

Se observă imediat că prima inegalitate este verificată pentru $N \leqslant 1$ iar a doua pentru $N \geqslant -1$. Deci condițiile de stabilitate sînt verificate dacă

$$N^2 - 1 \leqslant 0. \tag{26}$$

Această arată că oricare ar fi amortizarea, dacă condiția (26) este verificată, mișcările periodice ale sistemului cu amortizare sînt stabile.

Trebuie remarcat însă, că folosind condiția (26) se restrînge domeniul de stabilitate. Deci pot să existe mișcări periodice stabile ale sistemului chiar dacă nu este verificată inegalitatea (26).

Pentru precizarea domeniilor de stabilitate se poate folosi digarama Meissner (fig. 2) cunoscută în studiul ecuației Hill cu caracteristica variabilă în trepte [5].

În mod deosebit interesează cazul cînd amortizarea este mică.

Conform observației făcute, dacă este satisfăcută condiția (26), mișcările periodice sînt stabile. Pe fig. 2 domeniile de stabilitate nu sînt haşurate. Deci în cazul unei amortizări mici se poate folosi diagrama din fig. 2 care delimitează atît domeniile de stabilitate, cît și cele de instabilitate ale mișcării. Astfel, considerînd o amortizare mică, pentru studiul stabilității nu mai este necesar să se considere aproximațiile de ordin superior.

Aceste rezultate sînt valabile în condițiile (16) dar pot fi extinse și pentru celelalte cazuri. Pentru toate cazurile trebuie să fie verificată condiția (24).

Expresiile $N(\xi_1, \xi_2)$ calculate analog ca și în exemplul anterior, însă în toate cazurile posibile determinate de mărimea amortizării, se află în tabelul 1.

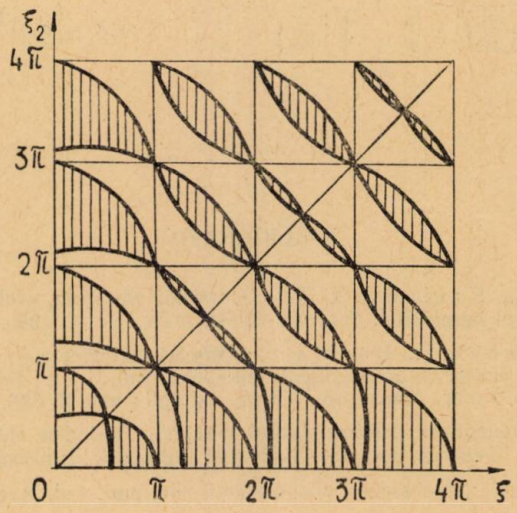


Fig. 2

Tabelul I

EXPRESIILE N (ξ_1, ξ_2) ÎN FUNCȚIE DE AMORTIZARE

Cazul	p_1	p_2	N (ξ_1, ξ_2)
$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{k_1}{m}$	$\sqrt{\frac{k_1}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{k_2}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$	$\cos \xi_1 \cos \xi_2 - \frac{p_1^2+p_2^2}{2p_1p_2} \sin \xi_1 \sin \xi_2$
$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k_1}{m}$	0	$\sqrt{\frac{k_2}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$	$\cos \xi_2 - \frac{1}{2} p_2 (\tau_k - t_k) \sin \xi_2$
$\frac{k_1}{m} < \left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{k_2}{m}$	$\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k_1}{m}}$	$\sqrt{\frac{k_2}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$	$\operatorname{ch} \xi_1 \cos \xi_2 + \frac{p_1^2-p_2^2}{2p_1p_2} \operatorname{sh} \xi_1 \sin \xi_2$
$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k_2}{m}$	$\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k_1}{m}}$	0	$\operatorname{ch} \xi_1 - \frac{1}{2} p_1 (t_{k+1} - \tau_k) \operatorname{sh} \xi_1$
$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{k_2}{m}$	$\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k_1}{m}}$	$\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k_2}{m}}$	$\operatorname{ch} \xi_1 \operatorname{ch} \xi_2 + \frac{p_1^2+p_2^2}{2p_1p_2} \operatorname{sh} \xi_1 \operatorname{sh} \xi_2$

BIBLIOGRAFIE

1. Osmakov S. A., Savinov O. A.: O dvijenii vibratora, svobodno opiraiușcegosia na uprugoi ogranicitel. Izv. AN SSSR. OTN, Nr. 3, 1960.
2. Silaș Gh., Brîndeu L., Bacria V.: Mișcări periodice ale unei mase libere pe un limitator elastic ce are o mișcare periodică. Bul. Șt. și Tehnic al I. P. Timișoara. Seria mat., fizică, mec. teoretică și apl.; tom 15 (29), fasc 1, 1970.
3. Brîndeu L.: Contribuții privind studiul mișcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante. Teză de doctorat. Institutul politehnic Timișoara 1970.
4. Kobrinski A. E.: Mehanizmî s uprughimi sviaziami. Izd. Nauka, Moskva, 1964.
5. Hamburger L., Buzdugan Gh.: Teoria vibrațiilor și aplicațiile ei în construcția mașinilor. Editura tehnică, București 1958.

DIE STABILITÄT DER PERIODISCHEN BEWEGUNGEN EINES VERBANDES MIT BILINEARER KENNLINIE

(ZUSAMMENFASSUNG)

Die Stabilität der periodischen Bewegungen eines Verbandes mit bilinearer Kennlinie (Abb. 1) wurde mit einer direkten Methode untersucht. Die Differentialgleichungen in den Variationen (6) werden integriert, dann werden die Integrationskonstanten mit Hilfe der Anfangs- (11) und Endbedingungen (12) bestimmt. Die so erhaltenen Lösungen werden in die Übergangsbedingungen (13) eingesetzt und man erhält die in den Perturbationen linearisierten Gleichungen aus denen die Stabilitätsbedingungen (24) und (25) abgeleitet werden. Die Stabilitäts bereiche erhält man mit Hilfe der Meissner'schen Stabilitätskarte (Abb. 2).

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМЫ С БИЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ.

(РЕЗЮМЕ)

Устойчивость периодических движений системы с билинейной характеристикой (рис. I) рассматривалась прямым методом.

Интегрируются дифференциальные уравнения в вариациях (6), затем устанавливаются постоянные интегрирования из исходных условий (11), соответственно конечных (12). Полученные решения вводятся в переходные условия (13), получая таким образом линеаризованные уравнения в возмущениях из которых выводятся условия устойчивости (24) и (25). Область устойчивости находится при помощи диаграммы Мейснера (рис. 2).

PRINCIPIUL CELOR MAI MICI CONSTRÎNGERI PENTRU SISTEME MATERIALE PERCUTATE

DE

I. N. CONSTANTINESCU

Lucrarea își propune extinderea principiului celei mai mici constrîngeri pentru situația în care forțelor continui li se asociază acțiunea unor percuții.

În interesul clarității expunerii trebuie în prealabil arătat că o percuție oarecare $\bar{P}$, înseamnă aplicarea unei forțe percutante:

$$\bar{F}_p = \bar{P}\delta(t-\tau) \tag{1}$$

în a cărei expresie $\delta(t-\tau)$ este distribuția lui Dirac, concentrată la momentul $t=\tau$ în care are loc șocul presupus instantaneu precum și modul în care percuția poate fi obținută ca limita unor acțiuni continui.

Fie deci forța

$$\bar{F}_{p\lambda} = \frac{\bar{P}}{\lambda^2\left[e^{\frac{t-\tau}{\lambda^2}} + e^{-\frac{t-\tau}{\lambda^2}} + 2\right]} \tag{2}$$

de variație continuă și indefinit derivabilă în raport cu timpul t și în care $\bar{P}$ e un vector constant, τ un scalar constant, iar λ un parametru.

Se va arăta că într-un caz limită această forță continuă devine percutantă.

O asemenea forță provoacă sistemului material căruia îi este aplicată, o variație de impuls.

$$\Delta\bar{C}_\lambda = m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{\bar{P}}{\lambda^2\left[e^{\frac{t-\tau}{\lambda^2}} + e^{-\frac{t-\tau}{\lambda^2}} + 2\right]}\,dt \tag{3}$$

În (3) m e masa totală a sistemului, t_0 și t momentele între care se consideră variația de impuls, iar $\bar{v}$ și $\bar{v}_0$ vitezele centrului de inerție la aceste momente.

Se verifică imediat că:

$$\left| \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\lambda^2 \left[e^{\frac{t-\tau}{\lambda^2}} + e^{-\frac{t-\tau}{\lambda^2}} + 2 \right]} \right| < 1 \qquad \text{pentru orice } t_0,\ t \text{ și } \lambda$$

și

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\lambda^2 \left[e^{\frac{t-\tau}{\lambda^2}} + e^{-\frac{t-\tau}{\lambda^2}} + 2 \right]} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } \tau \in (t_0, t) \\ 0 \text{ pentru } \tau \notin (t_0, t) \end{cases}$$

demonstrîndu-se astfel egalitatea

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda^2 \left[e^{\frac{t-\tau}{\lambda^2}} + e^{-\frac{t-\tau}{\lambda^2}} + 2 \right]} = \delta (t-\tau)$$

$\delta (t-\tau)$ fiind distribuția lui Dirac, egalitate care (dacă se ia $t_0 < \tau$, ceace este întotdeauna posibil fără a afecta generalitatea tratării) antrenează imediat relația

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\lambda^2 \left[e^{\frac{t-\tau}{\lambda^2}} + e^{-\frac{t-\tau}{\lambda^2}} + 2 \right]} = H (t-\tau)$$

unde

$$H (t-\tau) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } t < \tau \\ 1 \text{ dacă } t > \tau \end{cases}$$

este funcția lui Heaviside, cunoscut fiind că:

$$\frac{d}{dt} H(t-\tau) = \delta(t-\tau)$$

și

$$\int_{t_0}^{t} \delta (t-\tau)\, dt = H (t-\tau)$$

operatorii de derivare și integrare fiind considerați în sensul teoriei distribuțiilor.

Luînd limita expresiei (3)

$$\lim_{\lambda \to 0} \Delta \bar{C}_\lambda = \Delta \bar{C} = \bar{P} H (t-\tau). \qquad (4)$$

Luînd limita expresiei (2)

$$\lim_{\lambda \to 0} \bar{F}_{p\lambda} = \bar{P}\delta\,(t-\tau). \tag{5}$$

Este evident că o percuție $\bar{P}$ dînd o creștere a impulsului sistemului percutat

$$\Delta\bar{C}_1 = \bar{P}H\,(t-\tau)$$

pentru un moment

$$t > \tau \text{ cînd } H\,(t-\tau) = 1$$

se obține

$$\Delta\bar{C} = \Delta\bar{C}_1 = \bar{P}$$

adică se ajunge la concluzia că funcția (4) este chiar variația impulsului în cazul unei percuții $\bar{P}$. Derivînd această variație, se va obține forța percutantă:

$$\frac{d}{dt}\,(\Delta\bar{C}) = \frac{d}{dt}\left[\bar{P}H(t-\tau)\right] = \bar{P}\delta(t-\tau)$$

care este chiar $\bar{F}_p$, aplicată la momentul $t=\tau$.

Din relațiile de mai sus precum și din toate considerațiunile de mai jos se poate conclude valabilitatea afirmației referitoare la expresia forței percutante

$$\bar{F}_p = \bar{P}\delta\,(t-\tau)$$

dată de (1) precum și la obținerea fenomenului de percuție ca un caz limită al unei acțiuni continui.

De remarcat că în locul funcției

$$y = \frac{1}{\lambda^2\left[e^{\frac{t-\tau}{\lambda^2}} + e^{-\frac{t-\tau}{\lambda^2}} + 2\right]}$$

utilizată pentru obținerea șocului ca un caz limită de variație continuă, se poate utiliza oricare alta, $y = f\,(t,\ \lambda)$ cu condiția ca

$$\lim_{\lambda \to 0} f(t,\ \lambda) = \delta(t-\tau).$$

De asemenea, ținîndu-se seama de principiul suprapunerii efectelor, se poate afirma că mai multe forțe percutante aplicate unui punct material, pot primi reprezentarea matematică

$$\bar{F}_{p\lambda} = \sum_{j=1}^{\nu} \bar{P}_j f_j(t,\ \lambda) \tag{6}$$

în care $\bar{P}_j$ sînt percuțiile în număr de γ, aplicate sistemului la momentele τ_j ($j=1, 2, \ldots, \gamma$), iar $\bar{F}_p$ este forța percutantă în acest caz mai general, forță ce se poate obține, conform raționamentelor anterioare, printr-un proces la limită.

$$\bar{F}_p=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{j=1}^{\gamma}\bar{P}_j f_j(t,\ \lambda) \tag{7}$$

unde:

$$\lim_{\lambda\to 0} f_j(t,\ \lambda)=\delta(t-\tau_j).$$

Odată această realitate stabilită, fie un sistem de n puncte materiale, supus unor legături exclusiv olonome (reonome sau scleronome), care are h grade de libertate, exprimate prin coordonatele generalizate q_i ($i=1, 2, \ldots, h$).

Fie M_s ($s=1, 2, \ldots, n$) punctele aparținînd sistemului. Să presupunem că asupra punctelor materiale ale sistemului acționează forțele exterioare $\bar{F}_s$.

Fie M_s (x_s, y_s, z_s) punctele de masă m_s aparținînd sistemului ($s=1, 2, \ldots, n$), puncte în care acționează forța $\bar{F}_s$ (X_s, Y_s, Z_s). Punctul material M_s, supus legăturilor date, are accelerația $\bar{a}_s$ ($\ddot{x}_s, \ddot{y}_s, \ddot{z}_s$). Numind accelerația pierdută diferența accelerațiilor punctului M_s în mișcare liberă și constrînsă:

$$\bar{a}_p=\frac{\bar{F}_s}{m_s}-\bar{a}_s \tag{8}$$

notînd energia de accelerație pierdută cu:

$$A_p=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} m_s\bar{a}_p^2=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} m_s\left[\left(\frac{X_s}{m_s}-\ddot{x}_s\right)^2+\left(\frac{Y_s}{m_s}-\ddot{y}_s\right)^2+\left(\frac{Z_s}{m_s}-\ddot{z}_s\right)^2\right] \tag{9}$$

și constrîngerea sistemului cu:

$$Z=2A_p=\sum_{s=1}^{n} m_s\left(\frac{\bar{F}_s}{m_s}-\bar{a}_s\right)^2 \tag{10}$$

principiul celei mai mici constrîngeri (Gauss), arată că mișcarea sistemului este determinată de valoarea minimă a constrîngerii Z (respectiv a energiei de accelerație pierdută $A_p=\frac{1}{2}Z$). Principiul lui Gauss exprimă așadar faptul că dintre toate mișcările posibile, mișcarea reală este astfel aleasă de sistem încît constrîngerea sau deviația față de mișcarea teoretică fără legături să fie minimă.

Forțele $\bar{F}_s$ ce acționează asupra sistemului de puncte materiale sînt funcții continui și indefinit derivabile altfel nu este aplicabil principiul în accepțiunea clasică.

Dacă în anumite momente τ_{sj} ale mișcării intervin percutațiile $\bar{P}_{sj}$ în număr de γ_s, desigur că în aceste momente vom avea discontinuități în variația vitezelor, forțelor percutante vor fi infinit de mari, iar accelerațiile punctelor sistemului devin infinite. În acest caz constrîngerea Z devine o nedeterminare.

Extinderea domeniului de aplicabilitate a principiului celei mai mici constrîngeri este însă posibilă, astfel încît el să cuprindă și mișcările sistemelor percutante.

Suma tuturor forțelor percutante și nepercutante care acționează punctul M_s $(s=1, 2, \ldots, n)$ aparținînd sistemului, va fi:

$$\bar{\Phi}_s=\bar{F}_s+\bar{F}_p=\bar{F}_s+\sum_{j=1}^{\gamma_s}\bar{P}_{sj}\,\delta(t-\tau_{sj}) \tag{11}$$

Sub acțiunea forțelor $\bar{\Phi}_s$ sistemul material va avea o mișcare descrisă de funcțiile

$$q_i=q_i(t) \quad (i=1, 2, \ldots, h)$$

care vor fi continui, dar care nu vor admite derivatele în sens clasic, în raport cu timpul, la momentele $t=\tau_{sj}$

$$(s=1, 2, \ldots, n\,; \quad j=1, 2, \ldots, \gamma_s)$$

datorită percutațiilor aplicate.

Vitezele generalizare $\dot{q}_i\,(t)$ $(i=1, 2, \ldots, h)$ vor prezenta discontinuități la momentele $t=\tau_{sj}$.

Însă mișcarea percutantă discontinuă, poate fi obținută ca limita unei mișcări continui.

Fie pentru aceasta, același sistem material acționat de forțele continui:

$$\bar{\Phi}_{s\lambda}=\bar{F}_s+\sum_{j=1}^{\gamma_s}\bar{P}_{sj}f_{sj}(t,\ \lambda) \tag{12}$$

unde forțele $\bar{F}_s$ sînt identice cu cele din (11), la fel ca vectorii $\bar{P}_{sj}$ care sînt constanți, iar:

$$\lim_{\lambda\to 0} f_{sj}(t,\ \lambda)=\delta(t-\tau_{sj}). \tag{13}$$

Sub acțiunea forțelor $\bar{\Phi}_{s\lambda}$, datorită continuității acestora, sistemul va avea o mișcare continuă, coordonatele generalizate vor îndeplinii condiția $q_{i\lambda}\,(t) \in C^{p_1}$ $(i=1, 2 \ldots h)$ cu $p_1 \geqslant 1$.

Indicele λ cu care au fost afectate coordonatele generalizate indică dependența acestora de parametrul λ, dependență ce decurge din expresia (12) a forțelor $\bar{\Phi}_{s\lambda}$.

De asemenea și vectorii de poziție ai punctelor M_s vor depinde în consecință, de parametrul λ, împreună cu toate derivatele lor.

$$\bar{r}_{s\lambda}=\bar{r}_{s\lambda}(t,\ \lambda)\ ;\quad \bar{r}_{s\lambda}=\bar{r}_{s\lambda}(q_{1\lambda},\ q_{2\lambda},\ \ldots,\ q_{h\lambda},\ t)$$

$$q_{i\lambda}=q_{i\lambda}(t,\ \lambda)\ ;\quad \dot{q}_{i\lambda}=\dot{q}_{i\lambda}(t,\ \lambda).$$

În consecință constrîngerea (11) va avea expresia:

$$Z_\lambda=\sum_{S=1}^{n} m_s\left(\frac{\bar{\Phi}_{s\lambda}}{m_s}-\ddot{\bar{r}}_{s\lambda}\right)^2 \tag{14}$$

Dar după (11), (12) și (13)

$$\lim_{\lambda\to 0}\bar{\Phi}_{s\lambda}=\bar{\Phi}_s$$

ceace înseamnă că, în cazul limită $\lambda\to 0$ sistemul de forțe continui $\Phi_{s\lambda}$ se transformă în sistemul de forțe exprimate prin forma (12), la care participă atît forțele continui F_s cît și forțele percutante

$$\sum_{S=1}^{\gamma_s}\bar{P}_{sj}\delta(t-\tau_{sj}).$$

Fie limitele

$$\lim_{\lambda\to 0} Z_\lambda=Z$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\ddot{\bar{r}}_{s\lambda}=\ddot{\bar{r}}_s=\bar{a}_s$$

Constrîngerea (14) devine:

$$Z=\sum_{S=1}^{n} m_s\left\{\frac{1}{m_s}\left[\bar{F}_s+\sum_{j=1}^{\gamma_s}\bar{P}_{sj}\delta(t-\tau_{sj})\right]-\ddot{\bar{r}}_s\right\}^2 \tag{15}$$

Aceasta este expresia constrîngerii în cazul unui sistem de puncte materiale percutate la momentele τ_{sj}.

Mișcarea reală, avînd loc pentru constrîngerea minimă, presupune și o minimă energie de accelerație pierdută.

Aceasta duce conform celor cunoscute la posibilitatea de scriere a ecuațiilor lui Appell:

$$\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_i}=Q \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ h).$$

Ele exprimă faptul că, în fiecare moment dat, valorile acceleraţiilor generalizate sînt astfel încît energia de acceleraţie pierdută are cea mai mică valoare.

Deci, presupunînd mişcarea sub acţiunea forţelor continui date de expresia (12), există sistemul

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial \ddot{q}_{i\lambda}} = \sum_{s=1}^{n} \bar{F}_s \frac{\partial \bar{r}_{s\lambda}}{\partial q_{i\lambda}} + \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{\gamma_s} \bar{P}_{sj} \frac{\partial \bar{r}_{s\lambda}}{\partial q_{i\lambda}} f_{sj}(t, \lambda). \tag{16}$$

Potrivit raţionamentului de mai sus cazul limită $\lambda \to 0$ corespunde situaţiei în care sistemul material este percutat (în punctele M_s cu percuţiile $\bar{P}_{sj}$, $s = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, 2, \ldots, \gamma_s$), deci forţele continui (12) se transformă în percutante (11), iar funcţiile $f_{sj}(t, \lambda)$ în distribuţia Dirac (13). Sistemul de ecuaţii (16) va descrie mişcarea în cazul suprapunerii forţelor continui şi percutante şi se va obţine pentru acest caz limită un sistem de ecuaţii de tipul referitor la sistemele materiale percutate în care:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda = A \\
&\lim_{\lambda \to 0} q_{i\lambda}(t, \lambda) = q_i(t) \\
&\lim_{\lambda \to 0} \dot{q}_{i\lambda}(t, \lambda) = \dot{q}_i(t) \\
&\lim_{\lambda \to 0} \ddot{q}_{i\lambda}(t, \lambda) = \ddot{q}_i(t) \\
&\lim_{\lambda \to 0} \bar{r}_{s\lambda} = \bar{r}_s
\end{aligned} \tag{17'}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\partial \bar{r}_{s\lambda}}{\partial q_{i\lambda}} = \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_i}; \qquad \lim_{\lambda \to 0} \frac{\partial A_\lambda}{\partial \ddot{q}_{i\lambda}} = \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_i}$$

În ipoteza că sînt satisfăcute toate condiţiile necesare ca limitele (17' să existe se poate scrie imediat:

$$\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_i} = \sum_{s=1}^{n} \bar{F}_s \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_i} + \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{\gamma_s} \bar{P}_{sj} \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_i} \delta(t - \tau_{sj}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

care sînt în mod evident ecuaţiile lui Appell pentru sistemele materiale percutate.

Aceste ecuaţii au fost obţinute şi pe altă cale, fără însă a se extinde principiul lui Gauss pentru sistemele materiale percutate, aşa cum se procedează în prezenta lucrare.

Toate considerațiunile de mai înainte pentru acest caz conduc la ecuațiile lui Appell după cum s-a văzut ca o consecință imediată a principiului lui Gauss.

În cele ce urmează se va da un exemplu de calcul simplu, dar edificator, în ceeace privește modul de aplicare a celor de mai sus.

Fie un punct material care are masa m și care e acționat de forța constantă $\overline{F}=\alpha\overline{i}$, unde $\overline{i}$ e un versor constant.

Dacă la momentul $t=\tau$ punctul este percutat, vectorul percuție fiind $\overline{P}=\beta\overline{i}$ aceste ecuații ale lui Appell sînt:

$$m\ddot{x}=\alpha+\beta\delta(t-\tau)$$

$$m\ddot{y}=0$$

$$m\ddot{z}=0$$

cu notațiile evidente.

Se va presupune în continuare pentru simplitate că viteza inițială este $\overline{v}_0=v_0\overline{i}$ iar spațiul inițial $\overline{r}_0=x_0\overline{i}$.

Integrînd în sensul teoriei distribuțiilor sistemul ecuațiilor diferențiale de mai sus și ținînd seama de datele inițiale se obține legea de mișcare:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\alpha t^2}{2m}+\dfrac{\beta}{m}(t-\tau)\,H\,(t-\tau)+v_0t+x_0 \\ y=0 \\ z=0. \end{cases}$$

După cum se vede este vorba de o mișcare rectilinie uniform accelerată aproape peste tot, adică cu excepția momentului $t=\tau$, în care particula studiată suferă acțiunea unei percuții, fapt care introduce și discontinuitatea în mișcare.

O manieră similară poate conduce la rezolvarea altor cazuri de mișcări mecanice mult mai complicate.

BIBLIOGRAFIE

1. I. I. Plăcinteanu — Mecanica vectorială și analitică Ed. Tehnică 1958, Ediția II-a.
2. V. Vîlcovici, St. Bălan, Radu Voinea — Mecanica teoretică, Editura Tehnică 1963, Ediția II-a.
3. C. Platrier — Mécanique rationelle. Dunond. Paris 1954, tome I.
4. M. Bouix — Les fonctions generalisées en distributions — Messon Paris, 1964.
5. E. Tocaci — Asupra ecuațiilor mecanicii analitice pentru cazul sistemelor materiale percutante. St. cerc. mat., tomul 18 Nr. 8, 1966.

THE PRINCIPLE OF THE LEAST ACTION FOR THE MATHERIAL SYSTEMS WITH IMPACTS

(SUMMARY)

The work paper uses the Gauss's principle for the study of jump movements of the matherial systems with impacts.

The mathematical calculus used is the theory of generalized functions, considering of Dirac distribution as a limit of a continuous and derivating function which fullfils the known conditions.

This way of treating the problem reflects the idea of expressing the discontinuous fenomena as a limit of those continuous, concerning the collision forces as limit sof continuous forces.

ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО СЖАТИЯ ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ УДАРНЫХ СИСТЕМ

(РЕЗЮМЕ)

В работе применяется принцип Гаусса для изучения прерывистых движений материальных ударных систем.

Математическая аппаратура состоит из теории обобщенных функций, учитывая распределение Дирака в качестве предела непрерывной функции обладающей производной и подчиняющейся данным условиям.

Такой способ рассмотрения задачи содержит мысль выражения прерывистых явлений как предел непрерывных явлений касающихся ударных усилий как предел непрерывных усилий.

UNELE ASPECTE CU PRIVIRE LA DEPUNEREA ELECTROLITICĂ A ALIAJULUI Ni-Fe.

DE

A. MUNTEANU, I. KREMMER, I. ARTZNER, R. BAEA

Introducere

Prezența impurităților de fier în băile de nichelaj a fost mult timp considerată ca dăunătoare aderenței și calităților păturilor de nichel. Treptat, recunoscîndu-se unele merite ale aliajului, s-a căutat mijlocul de a depune fierul aliat cu nichelul. W. Phanhauser [1] citează o serie de încercări mai vechi, dar în prezent problema depunerii simultane, prin electroliză a elementelor din grupă fierului face obiectul unor cercetări remarcabile [2], [3].

În procesul realizării straturilor de aliaj Ni-Fe, adausul de fier în baia de nichel, micșorează aderența acoperirii, îndeosebi în cazul unui strat cu conținut mare de fier. Deasemenea, instabilitatea băilor electrolitice, determinată de tendința de oxidare a sărurilor feroase face baia de multe ori inutilizabilă în timp. Această oxidare decurge cu atît mai rapidă cu cît prin adăugare de sare feroasă în electrolit se urmărește o mărire a proporției de fier în depozitul metalic. Aliajul Ni-Fe, ca strat protector, nu trebuie să depășească un conținut mai mare de 40% Fe [4].

Pentru obținerea aliajului Ni-Fe se folosesc băi electrolitice cu săruri de sulfați și cloruri [5], cu cianuri, care dau rezultate mai puțin satisfăcătoare, iar mai recent, băi ce conțin pirofosfați [6], [7], prezența fosforului afectînd proprietățile magnetice ale depozitului.

Un neajuns al aliajelor de Ni-Fe, depuse electrolitic din băi de sulfați, constă în marea lor fragilitate și insuficienta lor aderență la metalul suport.

Calitățile depunerii nu se modifică esențial dacă în baia electrolitică există mici cantități de cloruri [8] :

În lucrarea de față se prezintă obținerea aliajului Ni-Fe, în straturi de 25μm, cu bune proprietăți de acoperire și cu proprietăți magnetice optime folosind băi electrolitice cu diverse formule.

Obținerea probelor

În raport cu scopul urmărit, am recurs la băi electrolitice mixte din care am ales două variante în privința compoziției :

1. Baia Watts [9], cu adausuri de :

$Fe(NH)_2\ (SO)_26\ H_2O$	37 g
Sarea de natriu a acidului 2−6 sau 2−7 naftalin disulfonic	2 g
Natriu lauril sulfat	1 g
Zaharină	1 g
H_2O	1000 cm

P_H=2,7
Temperatura : 20°C
Densitatea de curent între 0,5−3 (A/dm²).

2. Baia electrolitică pe bază de săruri amoniacale :

$Ni(NH)_2\ (SO)_2\ 6\ H_2O$	100 g
$Fe(NH)_2\ (SO)_2\ 6\ H_3O$	6 g
H_3BO_3	30 g
NaCl	10 g
Zaharină	0,6 g
Texapon	0,6 g

P_H=2,7
Temperatura 20°C
Densitatea de curent între 0,5−3 (A/dm²)

Adausul de zaharină și de substanțe superficial active îmbunătățește mult calitățile depunerii.

Ca suport s-a utilizat fir de cupru cu diametrul de 1 mm, care în prealabil a fost supus unei degresări chimice. Compoziția aliajului s-a stabilit prin analiză gravimetrică.

Pentru a evita o concentrare în ioni de fier a soluției electrolitice s-au folosit anode separate de Ni și Fe, stabilindu-se totodată un raport optim al intensităților de curent în derivațiile Ni catodă și Fe catodă.

Efectele sînt variate și complexe pentru a putea fi generalizate. Condițiile depuerii influențează raportul Ni/Fe al depozitului.

Componența acoperirii depinde în mare măsură de densitatea de curent și mai puțin de temperatură [10].

Rezultate experimentale

În fig.1 este redată dependența depozitului catodic, obținut din baia 1 și 2, funcție de densitatea de curent.

Comparînd cele două curbe, se observă că pentru baia 2 procentajul de nichel se menține practic constant la 77%, începînd de la 1,5 A/dm².

Pentru a urmări modificarea raportului Ni Fe cu adausul de $Fe(NH_4)_2(SO_4)_2$. 6 H_2O din baia electrolitică 2, am variat componentul feroamoniacal între limitele (2−24) g/l.

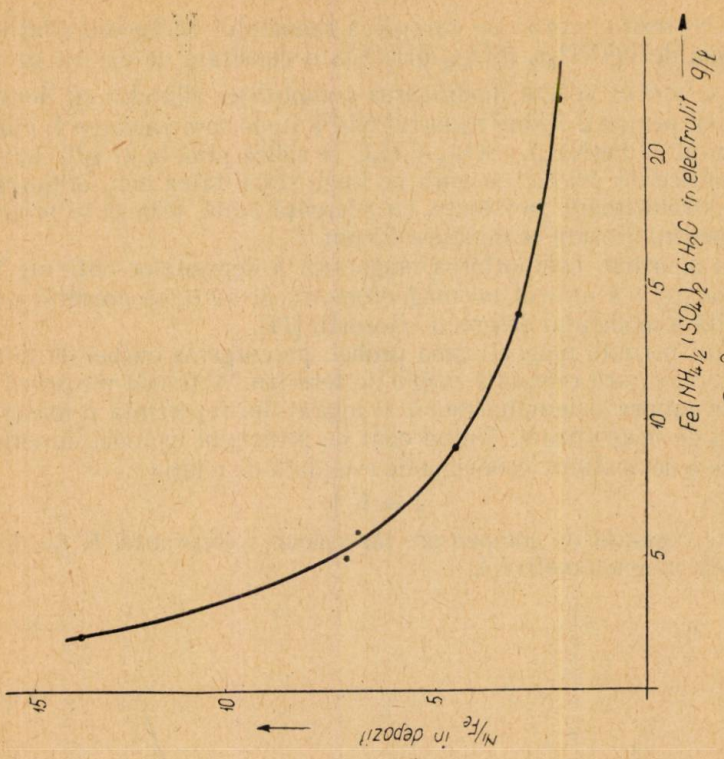

Ni/Fe în depozit
15
10
5
5
10
15
20
Fe(NH4)2(SO4)2 6H2O în electrolit g/l

Fig. 2

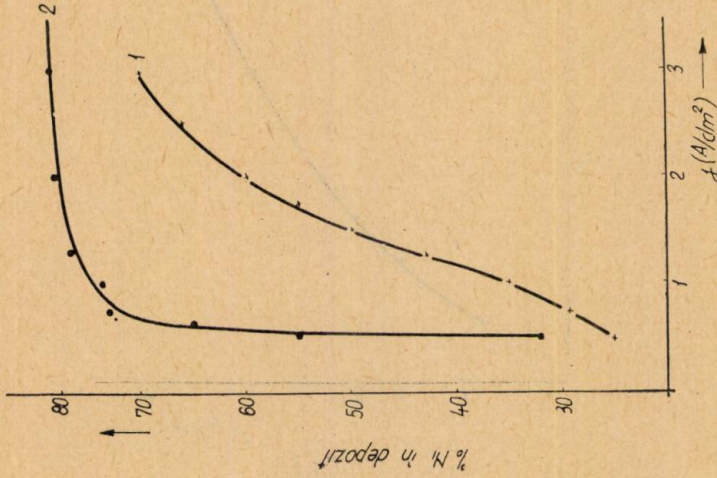

% Ni în depozit
80
70
60
50
40
30
1
2
3
1
2
D (A/dm²)

Fig. 1

Fig. 2 reprezintă curba de variație a raportului Ni/Fe din aliaj în funcție de cantitatea de $Fe(NH_4)_2\ (SO_4)_2 \cdot 6H_2O$ la o densitate de curent de 2 A/dm².

Dacă se are în vedere modificarea compoziției aliajului cu densitatea de curent (fig.1), pentru 2 A/dm² raportul Ni/Fe tinde spre valoarea 1, cînd în baia Watts adausul de $Fe(NH_4)_2\ (SO_4)_2 \cdot 6\ H_2O$ se ridică pînă la 37 g/l. Aceste depuneri electrolitice de Ni-Fe, asigură pe lîngă stabilitatea băii, obținerea de pături foarte strălucitoare, rezistente, cu aderență bună, fără să se producă exfolieri chiar pentru grosimi ce depășesc 25 μm.

Pentru a urmări comportarea magnetică a depozitelor obținute în condițiile menționate, s-a utilizat un magnetometru de zero, ce prezintă o adaptare îmbunătățită a modelului descris de Bozorth [11].

Aparatul permite magnetizarea probei, parcurgerea curbei de histereză în condițiile compensării cîmpului magnetic terestru. Acțiunea mecanică a probei magnetizate asupra sistemului mobil al aparatului reprezintă o măsură pentru intensitatea de magnetizare. Ținînd cont de principiul metodei, intensitatea de magnetizare a depozitului feromagnetic este dată de relația :

$$J = K\ I_c$$

unde I_c este curentul de compensare iar valoarea constantei K nu depinde de sensibilitatea magnetometrului.

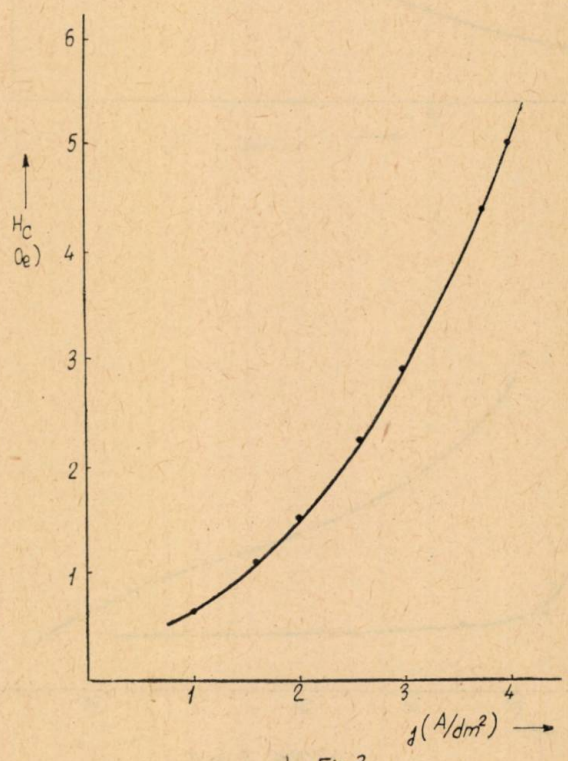


Fig.3

Întrucît prezintă interes acele constante magnetice care sînt legate de structură, s-a determinat cîmpul coercitiv la diverse probe obținute din băile electrolitice studiate.

Condițiile depunerii influențează în mare măsură și proprietățile magnetice ale depozitului ; astfel cu creșterea densității de curent, pentru toate probele, cîmpul coercitiv crește. În fig. 3 este reprezentată această variație pentru o baie de tipul 1 cu 18 g/l $Fe(NH_4)_2(SO_4)_2 \cdot 6\, H_2O$.

Cîmpul coercitiv la aliajele obținute din baia 1 are valori sub 1Oe și prezintă un minim la raportul procentual aproximativ 1 : 1 (fig.4 a). Din baia 2 se obțin probe cu cîmp coercitiv între 0,4 și 3 oersted, atingînd un minim la un conținut de Ni 73,9%, (fig.4 b) constatat și de alți autori [10].

Proprietățile magnetice ale straturilor de aliaj Ni-Fe sînt influențate de prezența în electrolit a substanțelor superficial active. Astfel adăugarea în electrolit de : sare de natriu a acidului 2−6 sau 2−7 naftalindisulfonic, laurilsulfat de natriu sau texapon a determinat micșorarea cîmpului coercitiv chiar sub 0,5 Oe. Fig. 5 prezintă curba de histerezis la o probă de aliaj Ni-Fe cu conținut de 80% Ni, obținută din baia 1.
Iar fig. 6 pentru același aliaj cu un conținut mai mare de naftalindisulfonic, la care se observă un cîmp coercitiv slab (0,75 Oe) și un raport de rectangularitate apropiat de 1, ceea ce ne permite să afirmăm că o baie de tipul 1 poate fi folosită pentru obținerea aliajului de Ni-Fe cu bune proprietăți magnetice.

Raportul de rectangularitate ce caracterizează curba de histereză crește odată cu densitatea de curent, iar pentru compoziția cu procentajul cuprins între (77−80)% Ni, se păstrează constant la raportul 1/2.
Cîmpul coercitiv la aliajele de Ni-Fe studiate este mai mic decît la fier și nichel în parte.

Concluzii

Din rezultatele obținute reiese că printr-o alegere convenabilă a compoziției băilor și a condițiilor de depunere se pot obține pături cu cele mai variate calități magnetice. În special prezintă interes probele care dau curbe de histerezis rectangulare, fiind folosite ca material magnetic pentru memoriile computerilor.

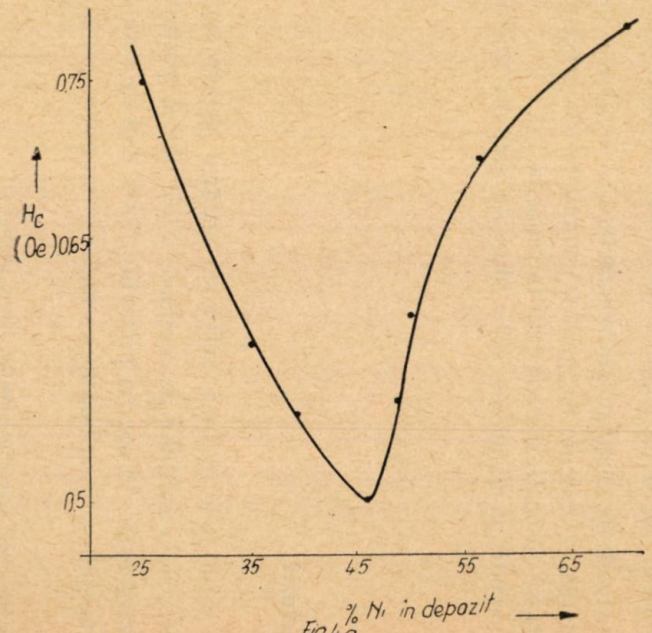

0,75
H_c
(Oe) 0,65
0,5
25
35
45
55
65
% Ni in depozit

Fig 4a

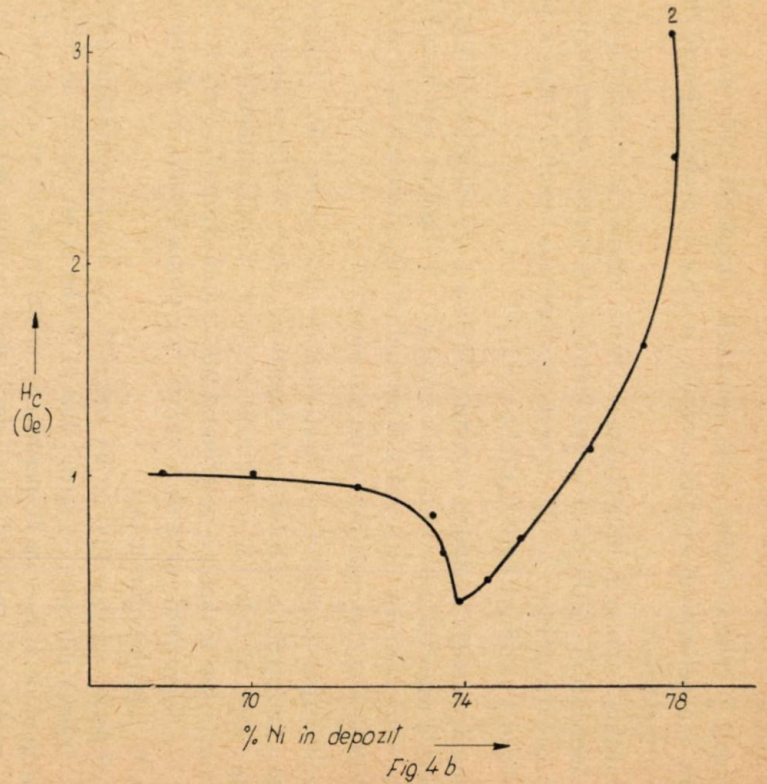

3
2
1
H_c
(Oe)
70
74
78
% Ni in depozit

Fig 4b

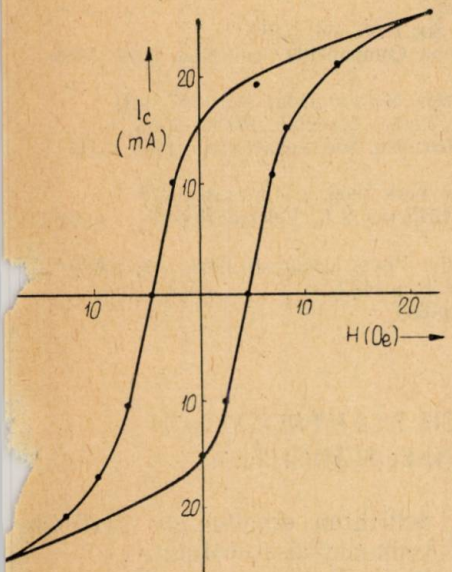


Fig 5

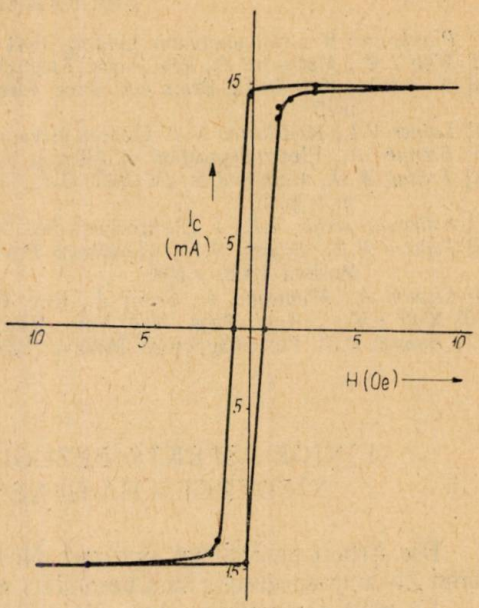


Fig 6

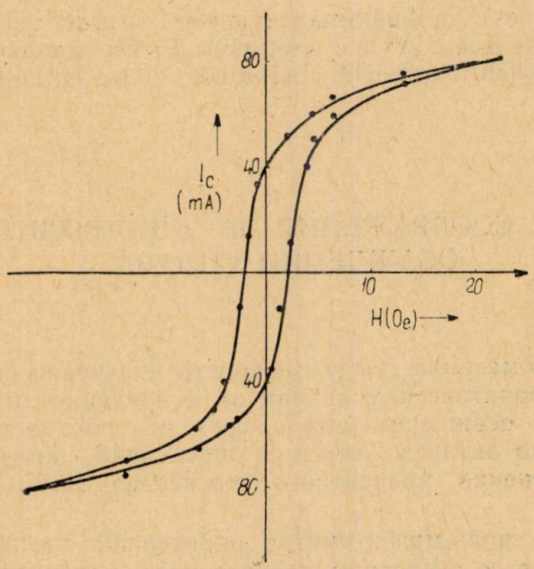


Fig. 7

Fig. 7

BIBLIOGRAFIE

[1] *Pfanhauser W.*, Galvanotehnic Leipzig, 1941 p.557
[2] *Wolf I.W., McConnel P.*, Proc Amer. Electrolp. Soc.1956, 1-4, p.215
[3] *Wolf I.W., Katz H.W.*, Brain A.E. Proc. Electronic Components Conf. New York, 1956 p.15
[4] *Lainer V.I., Kudriavțev N.T.* Osnovâ gslvanosteghi Metalurgizdat M., 1957, v.II
[5] *Brenner A.*, Electrodeposition of Alleoys, New York - Academic Press., 1963, v.I
[6] *Freitag W.O., Mathies J.S., Di Guilio G.J.*, Electrochem. Soc. Pensylvania, 1964, v.III nr.1, p.35
[7] *Schmeckenbecher A.F.*, J. Electrochem. Soc. New York 1966, v.113, nr.8, p.778
[8] *Fedotev N.P., Bibicov N.N., Viaceslavov P.N.*, Griliches S.I., Eelctroliticeskie spalvî - Moskva 1962, p.228
[9] *Cişman A., Munteanu A., Schiff A.*, Rev. Roum. Phys. Bucureşti 1964, v.9, p.829
[10] *Wolf I.W., J.Appl. Phys.*, New York, 1962, v.33, p.1152
[11] *Bozorth R.M.* Ferromagnetism, Moskva, 1956, p.680

EINIGE ASPEKTE BEZUGLICH ELEKTROLITISCH NIEDERGESCHA-GENEN Ni-Fe SCHICHTEN

Die Arbeit beschäftigt sich mit Ni-Fe Schichten, erhalten aus Mixtbäde deren Zusammensetzung sich besonders auf Ammoniakalsalze stutzt.

Es wird festgestellt, dass die Niederschlagbedingungen wie Stromdichte und Zusatz von grenzflächenaktiven Fremdsubstanzen die Qualitat der Abscheidung bestimmen, das Verhaltnis Ni/Fe und die magnetischen Eigenschaften verändern.

Mit Hilfe eines Nullpunktmagnetometers wurden Hystereseschleifen aufgehoben und das Koerzitzivfeld bestimmt. Ferner werden Abschätzungen auf das Rechteckverhaltnis gemacht, eine Grosse von Bedeutung fur Speicherelemente.

НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ ОБ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОМ ОСАЖДЕНИИ СПЛАВА.

В работе рассматривается возможности получения сплавово в сме шанных в электролитических ваннах на основании аммиячных солей

По условиям осаждения установлено, что плотность тока и пр меси поверхностно активных веществ определяют наилучшие свойств осаждений, изменение процентного отношения Ni/Fe и магнитны свойств.

Применением ноль-магнитометра определены магнитные характ ристики связанные со строением, связное поле и гистеризисные кривы сплавово Ni/Fe, установив также коэффициент прямоугольности, необ ходимая величина для магнитной памяти.

137

1973 JUN 12

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic Timişoara. Seria Matematică, Fizică, Mecanică teoretică şi aplicată	Tom 16(30)	**Fasc.** 1	**pag.** 1 – 136	Timişoara	Ianuarie-Iunie 1971

I.P.B.T. 1523

Lei 10

OF 2667

Lit.: 037576

BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIŞOARA

SERIA

MATEMATICA — FIZICA — MECANICA TEORETICĂ ŞI APLICATĂ

Tomul 16 (30) Fascicola 2

IULIE — DECEMBRIE
1971

BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC AL INSTITUTULUI POLITEHNIC TIMIŞOARA

SERIA MATEMATICĂ –FIZICĂ– MECANICĂ TEORETICĂ şi APLICATĂ

Tomul 16 (30) Fascicola 2

IULIE — DECEMBRIE
1971

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
7414
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

COLEGIUL DE REDACŢIE

Prof. em. dr. ing. GH. SILAŞ (redactor şef), prof. em. ing. CONSTANTIN AVRAM, m. c. al Academiei R.S.R., prof. dr. doc. ing. I ANTON, m. c. al Academiei R.S.R., prof. dr. ing. M. BORNEAS, prof. dr. ing. M. BRAŞOVAN, prof. ing. V. COCHECI, academician prof. dr. doc. C. DRĂGULESCU, prof. dr. O. EM. GHEORGHIU, prof. ing. V. GHEORGHIU, prof. ing. GH. SAVII, prof. ing. D. MATEESCU, prof. dr. ing.I. NOVAC.

Budapesti Műszaki Egyetem
Könyvtár
Folyóiratosztály
866/1978

COMITETUL DE REDACŢIE

Prof. dr. O. EM. GHEORGHIU (redactor responsabil), prof. dr. ing. M. BORNEAS (redactor responsabil adjunct), prof. em. dr. ing. GH. SILAŞ, conf. dr. B. CRSTICI, conf. dr. C. SIMOIU, conf. dr. ing. I. GROŞANU şi conf. dr. ing. L. BRÎNDEU (secretar de redacţie).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
1848
KÖZPONTI KÖNYVTÁRA

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
DIN TIMIȘOARA

Seria Matematică-Fizică-Mecanică teoretică și aplicată.

Tom. 16 (30) Fasc. II. Iulie-decembrie 1971

M. KUCHARSEVSKI, A. ZAJTZ : Soluția generală a ecuației funcționale multiplicative pentru matrici pseudostohastice 145

M. KUCZMA : Observații privind soluția generală a unei ecuații funcționale 155

P. M. VASIC, J. D. KECHIC : O ecuație funcțională legată de convexitatea generalizată 167

B. CRSTICI : Asupra ecuației funcționale a lui Jensen — Carmichael 173

I. P. POPESCU : Asupra spațiilor fibrate cu grup structural GA (n,R). (II). 181

J. TĂUBER : O nouă clasă de soluții a unei ecuații funcționale 193

M. BORNEAS : Tranziții cuantice perturbate 201

COLETA DE SABATA : Considerații cu privire la anizotropia în raport cu cîmpul magnetic al păturilor electrolitice subțiri de Ni—Fe 207

C. ACKER : Transformări adiabatice neizentropice supersonice pe o familie de plane paralele 219

GH. SILAȘ, L. BRÂNDEU : Studiul mișcărilor vibropercutante ale unei mase libere între doi limitatori cu excitație cinematică 225

GH. SILAȘ, I. GROȘANU : Studiul mișcărilor staționare ale unui sistem autonom cu trei grade de libertate 233

F. TOCACI : Extinderea principiului variațional al lui Hamilton pentru sisteme materiale percutate 241

BULLETIN SCIENTIFIQUE ET TEHNIQUE
DE
L'INSTITUT POLYTECHNIQUE „TRAIAN VUIA"
DE TIMIŞOARA

Série Mathematique-Physique-Mécanique Théorique et, appliquée

Tomme 16 (30) Dasc. 2 Juillet-Decembre 1971

SOMMAIRE

M. KUCHARZEWSKI, A. ZAJTZ : Allgemeine Lössung der multiplikativen Funktionalgleichung für pseudostochastische Matrizen 145

M. KUCZMA : Remarks concerning the general solution of a functional equation 155

P. M. VASIĆ, J. D. KECKIĆ : A functional equation related to generalized convexity 167

B. CRSTICI : Sur l'equation functionelle de Jensen-Carmichael 173

I. P. POPESCU : Sur les espaces fibrès à groupe structural GA (n, R). (II) 181

J. TÄUBER : Eine neue Klasse von Lösungen einer Funktionalgleichung 193

M. BORNEAS : Pertunbed quantun Transitions 201

COLETTE DE SABATA : Considerations concernant l'anisotropie par rapport au champ magnétique des couches électrolytiques de Ni—Fe 207

C. ACKER : Transformations adiabatiques anistropiques supersoniques le long d'une famille de plans parallèles 219

GH. SILAŞ, L. BRÎNDEU : The study shock-vibration movement of a free mass betwen the two limiters with the kinematicexcitation 225

GH. SILAŞ, I. GROŞANU : The study of the steady movements of on autonomous system with three degrees of freedoni 233

E. TOCACI : Le principe variationel de Hamilton pour les mouovements discontinus 241

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ БЮЛЛЕТЕНЬ
ТИМИШОРСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
им. «ТРАЯН ВУЯ»

МАТЕМАТИКА — ФИЗИКА — ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И
ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Том 16(30) Выпуск II. Июль—Декабрь 1971 г.

М. КУХАРЦЕВСКИЙ, А. ЗАИЦ: Общее решение функционального мультипликативного уравнения для псевдостохастических матриц 145

М. КУЦМА: Примечания относительно овщего решения одного функционального уравнения 155

П. М. ВАСИЧ, Ж. Д. КЕЧКИЧ: Функциональное уравнение связанное с понятием обобщенной конвексности 167

Б. КРСТИЧ: О функциональном уравнении Йенсена-Кармайкла 173

И. П. ПОПЕСКУ: К расслоенным пространствам со структуральным группом. G.A. (n, R) (II) 181

Ж. ТАУБЕР: Новый класс решений функциональных уравнений 193

М. БОРНЕАС: Квантовые пертурбируемые переносы 201

КОЛЕТТ ДЕ САБАТА: В связи с анизотропией по отнощению к магнитному полю электролитическим тонких слоев 207

С. АКЕР: Сверхзвуковых неизэнтропичные адиабатические преобразование, вдоль семейство паралельной плоскости 219

Г. СИЛАШ, Л. БРЫНДЕУ: К виброуданому движению свободной массы между двумя упорами с кинематическим возбуждением 225

Г. СИЛАШ. И. ГРОШАНУ: Исследование установившимся движении автономной системы с тремя степенями свободы 234

В. Е. ТОКАЧ: Вариационный принцип распределений Гамильтона для прерывистых движений 241

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată. Tomul 16(30),
Fasc. 2/1971.

ALLGEMEINE LÖSUNG DER MULTIPLIKATIVEN FUNKTIONALGLEICHUNG FÜR PSEUDOSTOCHASTISCHE MATRIZEN

VON

M. KUCHARZEWSKI (KATOWICE) und A. ZAJTZ (KRAKÓW)

Herrn Prof. Dr. O. E. Gheorghiu zu seinem 50-ten Geburtstag gewidmet

Einleitung. Es sei $A\,(a_{ij})$, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, m$ eine Matrix über einem kommutativen Körper K.

Definition 1. A wird eine pseudostochastische Matrix genannt, wenn sie die Bedingung

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}=1, \tag{1}$$

erfüllt, ([3]).

Alle quadratischen pseudostochastischen Matrizen derselben Ordnung n bilden hinsichtlich der Matrixmultiplikation eine Halbgruppe mit Einheitselement und diejenigen regulären – eine Gruppe, ([3], Hilfssatz 1.2, 1.3). Diese werden entsprechen mit $\tilde{S}\,(n, K)$ und $S\,(n, K)$ bezeichnet.

In der vorliegenden Note bestimmen wir die allgemeine Lösung der multiplikativen Funktionalgleichung

$$f\,(X)\,f\,(Y)=f\,(XY), \tag{2}$$

für die Funktionen, die entweder auf $\tilde{S}\,(n, K)$ oder auf $S\,(n, K)$ definiert sind, (Satz 4.1 und Satz 5.1).

Die Beweise werden auf Sätzen ([3], Satz 3.1, Folgerung 4.2 und 4.3) aus einer frühren Arbeit gestützt. Mit der Funktionalgleichung (2) für stochastische Matrizen. ([1], S. 381), werden wie uns in einer nächsten Arbeit beschäftigen, ([4]).

Die Frage nach der allgemeinen Lösung der Funktionalgleichung (2) für stochastische Matrizen hat G. S. Goodman im Jahre 1970 gestellt. Gleichzeitig hat er uns mitgeteilt dass er diese Funktionalgleichung für pseudostochastiche Matrizen gelöst hat. Hier wird ein anderer und allgemeiner Beweis dargestellt, der als Basis für die Behandlung der Gleichung (2) für stochastische Matrizen dienen kann.

In §§ 1 und 2 führen wir einige Bezeichungen, Definitionen und Hilfssätze ein. Insbesondere werden dort pseudostochastische elementare und Permutationsmatrizen, (vgl. [3]), definiert und ihre grundlegenden Eigenschaften zusammengestellt. Dann bestimmen wir die Werte von $\tilde{f}$ für diese Matrizen, (§ 3). Mit Hilfe dieser bilden wir in §§ 4 und 5 die allgemeine Lösung f der Funktionalgleichung (2) im Falle, dass f auf $S(n, K)$ bzw. auf $\tilde{S}(n, K)$ definiert ist.

§ 1. Mit $F_{ik}(\beta)$, $\beta \neq 0$, $i \neq k$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n$, wird eine pseudostochastiche Matrix bezeichnet, die entsteht, wenn wir die i-te Zeile der Einheitsmatrix n-ter Ordung durch die folgende

$$(\overset{(1)}{0}, \ldots, 0, \overset{(l)}{\beta}, 0, \ldots, 0, \overset{(k)}{1-\beta}, 0, \ldots, \overset{(n)}{0})$$

ersetzen. Wir werden sie elementare pseudostochastische Matrix nennen, (vgl. [3], § 1).

Eine Matrix, die entsteht, wenn wir i-te und k-te Zeile der Einheitsmatrix umtauschen heisst Permutationsmatrix und wird mit P_{ik} bezeichnet, (vgl. [2], S. 188 und [3], § 1).

Alle Matrizen $F_{ik}(\beta)$ bei festen Indizes i und k mit Matrixmultiplikation bilden eine Untergruppe von $S(n, K)$. Alle Permutationsmatrizen generieren eine endliche Untergruppe von $S(n, K)$, die wir mit $P(n, K)$ bezeichnen werden.

Mit $E(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ wird eine pseudostochastische Matrx bezeichent, in der die Elemente a_{ki_k}, $k=1, 2, \ldots, n$, gleich Eins und alle anderen gleich Null sind.

Die Matrix $E(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ hat kanonische Form, wenn ihre Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_n$ den Bedingungen

$$i_1=1,\ i_k \leqslant i_{k+1} \leqslant i_k+1,\ k=1, 2, \ldots, n-1, \tag{1.1}$$

genügen, (vgl. [3], Definition 1).

Über die kanonische Form der pseudostochastischen Matrizen ist in [3] der nachstehende Hilfssatz ([3], Folgerung 4.2) bewiesen worden, der in dieser Arbeit eine grundlegende Rolle spielt.

Hilfssatz 1.1 Jede pseudostochastische Matrix A kann in der Form

$$A=L \cdot E(i_1, i_2, \ldots, i_n) \cdot R \tag{1.2}$$

dargestellt werden, wo L und R Produkte der pseudostochastischen elementaren und Permutationsmatrizen sind.

Für die pseudostochastischen regulären Matrizen kann dieser Hilfssatz folgendermassen ausgedrückt werden ([3], Folgerung 4.3).

Hilfssatz 1.2. Jede pseudostochastische reguläre Matrix A ist dem Produkt endlicher Anzahl der pseudostochastischen elementaren und Permutationsmatrizen gleich,

$$A=R. \tag{1.3}$$

§ 2. Die Indizes der in der Formel (1.2) auftretenden kanonischen Matrix $E(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ genügen den Ungleichungen (1.1). Für pseudostochastische singuläre Matrizen A können diese etwas verschärft werden.

Hilfssatz 2.1. Für singuläre Matrizen A kann der Index i_2 in der Formel (1.2) gleich Eins sein,

$$i_2 = 1. \tag{2.1}$$

Beweis. Da L und R reguläre Matrizen sind, muss die Matrix $E(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ gleichfalls mit A singulär sein. Daraus folgt, dass wenigstens zwei unter den Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_n$ miteinander gleich sind. Durch entsprechende Vertauschung der Zeilen und Spalten können immer diese Indizes in den zwei ersten Zeilen eingestellt werden. Da die Vertauschung der Zeilen bzw. der Spalten mit linksseitiger bzw. rechtsseitiger Multiplikation durch Permutationsmatrix äquivalent ist, erhalten wir die Identität

$$E(i_1, i_2, \ldots, i_n) = L_1 \cdot E(1,1, k_3, \ldots, k_n) \cdot R_1, \tag{2.2}$$

in der L_1 und R_1 Produkte entsprechender Permutationsmatrizen bedeuten. Wird (2.2) in (1.2) eingesetzt, so geht diese in die im Hilfssatz 2.1 erforderte Form über.

Jetzt beweisen wir noch einen Hilfssatz über Matrizen in der kanonischen Form.

Es sei eine kanonische Matrix der Form

$$E(1,1, k_3, \ldots, k_n). \tag{2.3}$$

Aus den Ungleichungen (1.1) ergibt sich

$$k_1 = 1, \tag{2.4}$$

$$k_r < r, \quad r = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Wird eine beliebige andere kanonische Matrix

$$E(i_1, i_2, \ldots, i_n)$$

mit (2.3) rechtsseitig multipliziert,

$$E(i_1, i_2, \ldots, i_n) \cdot E(1,1, k_3, \ldots, k_n) = E(i_1, l_2, \ldots, l_n). \tag{2.6}$$

so erfüllen die in 2.6 auftretenden Indizes die Bedingungen

$$i_r = 1 \Rightarrow l_r = i_r = 1, \tag{2.7}$$

$$i_r > 1 \Rightarrow l_r < i_r, \quad r = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.8}$$

Um (2.7) und (2.8) zu zeigen, berechnen wir das Element c_{rl_r} von (2.6). Wir haben

$$1 = C_{rl_r} = \sum_{j=1}^{m} a_{rj} b_{jl_r} = a_{ri_r} b_{i_r l_r} = b_{i_r l_r} \tag{2.9}$$

wo a_{ij} bzw. b_{ij} Elemente von $E(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ bzw. von (2.3) bedeuten. Aus (2.9) und (2.4) ergibt sich 2.7 und aus (2.9) und (2.5) folgt (2.8).

Wenn wir in (2.6) die Matrix $E(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ durch (2.3) ersetzen, geht (2.6) in die folgende

$$E(1, 1, k_3, \ldots, k_n)^2 = E(1, 1, l_3, \ldots, l_n), \tag{2.10}$$

über, wobei entweder

$$k_r = l_r = 1, \quad r = 1, 2, \ldots, n,$$

oder

$$k_r > l_r,$$

ist. Da k_r und l_r natürliche Zahlen sind, erhalten wir aus (2.10) den nachstehenden Hilfssatz.

Hilfssatz 2.2. Für jede kanonische Matrix der Form (2.3) gibt es eine natürliche Zahl q derart, dass die Relation

$$E(1, 1, k_3, \ldots, k_n)^q = E(1, 1, 1, \ldots, 1), \tag{2.11}$$

gilt.

§ 3. Jetzt werden die Werte jeder multiplikativen Funktion f für die pseudostochastischen elementaren und Permutationsmatrizen bestimmt.

Es sei f eine multiplikative Funktion, die $\tilde{\tilde{S}}(n, K)$ in K_1 abbildet,

$$f: \tilde{\tilde{S}}(n, K) \to K_1.$$

K_1 ist ein beliebiger kommutativer Körper.

Aus der Beziehung

$$E \cdot E = E$$

folgt die Gleichheit

$$f(E)^2 = f(E),$$

die zeigt, dass entweder

$$f(E) = 1 \tag{3.1}$$

oder

$$f(E) = 0 \tag{3.2}$$

ist. Da aber (3.2) mit

$$f(X) = 0 \tag{3.3}$$

äquivalent ist, werden wir im weiteren nur den Fall (3.1) betrachten.

Aus (3.1) folgt die Ungleichung

$$f(X) \neq 0, \tag{3.4}$$

für alle $X \in S(n, K)$. In der Tat ist $f(X_0)=0$ für irgendeine Matrix aus $S(n, K)$, so muss f für jede Matrix aus $\tilde{S}(n, K)$ gleich Null sein,

$$f(X)=f(X_0X_0^{-1}X)=f(X_0)f(X_0X_0^{-1})=0.$$

Das widerspricht aber der Relation (3.1).

Ganz analog, wie in der Arbeit [2], S. 190, kann man zeigen, dass die Werte von f für die Permutationsmatrizen entweder gleich 1 oder gleich -1 sind, d. h.

$$f(P_{ik})=\varepsilon,\ \varepsilon^2=1,\ i\neq k,\ i, k=1, 2, \ldots, n, \tag{3.5}$$

ist.

Um noch die Werte von f für pseudostochastische elementare Matrizen zu bestimmen, führen wir die folgenden Bezeichnumgen

$$\varphi_{ik}(\beta)=f(F_{ik}(\beta)),$$

ein. Aus den Relationen

$$F_{ik}(\beta)=P_{il}\cdot F_{lk}(\beta)\cdot P_{il},\ F_{lk}(\beta)=P_{mk}\cdot F_{im}(\beta)\cdot P_{mk},$$

erhalten wir die Identitäten

$$\varphi_{ik}(\beta)=\varphi_{lk}(\beta)\varepsilon^2=\varphi_{lk}(\beta),\ \varphi_{ik}(\beta)=\varphi_{im}(\beta)\varepsilon^2=\varphi_{im}(\beta),$$

die zeigen, dass φ_{ik} von den Indizes i, k nicht abhängt. Wir können also $F_{ik}(\beta)$ kurz mit $\varphi(\beta)$ bezeichnen,

$$\varphi(\beta)=F_{ik}(\beta),\ i\neq k, \tag{3.6}$$

wobei φ eine multiplikative Funktion ist, die K in K_1 abbildet.

§ 4. Hier beschäftigen wir uns mit multiplikativen Funktionen, die auf der Gruppe $S(n, K)$ ddfiniert sind. Insbesondere wird der nachstende Satz bewiesen.

Satz 4.1. Jede multiplikative Funktion $f: S(n, K)\to K_1$, hat die Form

$$f(X)=\varphi(\operatorname{Det} X). \tag{4.1}$$

wo $\varphi: K\to K_1$, eine beliebige multiplikative Funktion ist.

B e w e i s. Es sei A eine reguläre pseudostochastische Matrix. Aus dem Hilfssatz 1.2 folgt, dass A als Produkt der pseudostochastischen elementaren und Permutationsmatrizen dargestellt verden kann, (Formel (1.3)). Wir bezeihcnen mit $F_1(\beta_1), \ldots, F_\varrho(\beta_\varrho)$ die elementaren pseudostochastischen und mit $P_1, \ldots, P_\sigma$ die Permutationsmatrizen, die in diesem Produkt auftreten. Es gelten die Relationen

$$\operatorname{Det} A=(-1)^\sigma\beta_1\ldots\beta_\varrho, \tag{2.4}$$

$$f(A)=\varphi(\beta_1\ldots\beta_\varrho)\varepsilon^\sigma. \tag{4.3}$$

Aus der Identität

$$F_{ik}(\beta)=P_{ik}\cdot F_{ik}\left(-\frac{\beta}{1-\beta}\right)\cdot F_{ki}(1-\beta),$$

folgt die Gleichheit

$$\varphi(\beta)=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\beta}{1-\beta}\right)\varphi(1-\beta)=\varepsilon\varphi(-\beta),$$

die zeigt dass

$$\varphi(-1)=\varepsilon \tag{4.4}$$

ist.

Wird (4.4) in (4.3) eingesetz, so erhalten wir

$$f(A)=\varphi(\beta_1\ldots\beta_\varrho(-1)^\sigma)=\varphi(\operatorname{Det} A). \tag{4.5}$$

Die letzte Formel wurde im (3.1) abgeleitet. Falls (3.2) gilt, genügt es $\varphi\equiv 0$ anzunehmen. Auf diese Weise ist unser Satz bewiesen.

§ 5. In diesem Paragraphen werden multiplikative Funktionen behandelt, die auf der Halbgruppe $\tilde{S}(n, K)$ definiert sind. Nämlich wir beweisen hier den folgenden Satz.

Satz 5.1. Jede multiplikative Funktion $f: \tilde{S}(n, K)\to K_1$, hat die Form

$$f(X)=\psi(\operatorname{Det} X), \tag{5.1}$$

wo ψ eine beliebige multiplikative Funktion ist, die K in K_1 abbildet.

B e w e i s. Da die Werte der Funktion f fur reguläre Matrizen im Satz 4.1 eindeutig bestimmt worden sind, genügt es nur diejnigen für singuläre Matrizen zu finden.

Ganz analog wie vorher können wir uns auf den Fall

$$f(E)=1, \tag{5.3}$$

beschränken.

Es sei A eine singuläre pseudostochastische Matrix. Auf Grund des Hilfssatzes 1.1 kann sie in der Form (1.2) dargestellt werden. Der Rang von der kanonischen Matrix $E(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ ist kleiner als n. Daraus folgt, dass auch der Index i_n kleiner als n ist und wenigstens die letzte Spalte von $E(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ aus lauter Nullen besteht. Solche Matrix bleibt ungeändert, wenn sie rechtsseitig mit $F_{n1}(\beta)$, $\beta\neq 0$, multiplizieren,

$$E(i_1, i_2, \ldots, i_n)=E(i_1, i_2, \ldots, i_n)\cdot F_{n1}(\beta). \tag{5.4}$$

Daraus folgt die Gleichung

$$f(E(i_1, i_2, \ldots, i_n))=f(E(i_1, i_2, \ldots, i_n))\,\varphi(\beta). \tag{5.5}$$

Es sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Es gibt ein $\beta_0 \neq 0$, so dass

$$\varphi(\beta_0) \neq 1.$$

Dann erhalten wir aus (5.5) die Relation

$$f(E(i_1, i_2, \ldots, i_n)) = 0,$$

aus der, wegen (1.2),

$$f(X) = 0 \tag{5.6}$$

für Matrizen X mit verschwindenden Determinanten, Det $X=0$, folgt. Wenn wir jetzt die Funktion ψ folgendermassen

$$\psi(\zeta) = \varphi(\zeta) \text{ für } \zeta \neq 0 \text{ und } \psi(0) = 0,$$

definieren, so hat f die im 5.1 erforderte Form.

2. Nun nehmen wir an, dass

$$\varphi(\beta) \equiv 1, \ \beta \neq 0, \tag{5.7}$$

ist. In diesem Falle enthält (5.5) keine Bedingung und wir müssen unabhängig von (5.5) die Werte der Funktion f bestimmen

Aus (4.4) ergibt sich, dass (5.7) mit

$$f(X) = 1, \ X \in S(n, K) \tag{5.8}$$

äquivalent ist.

Die Werte von f für die Matrix $E(1, 1, \ldots, 1)$ erfüllt die Bedingung

$$f(E(1, 1, \ldots, 1))^2 = f(E(1, 1, 1, \ldots, 1),$$

aus der folgt, dass entweder

$$f(E(1, 1, \ldots, 1)) = 0 \tag{5.9}$$

oder

$$f(E(1, 1, \ldots, 1)) = 1, \tag{5.10}$$

ist.

Falls (5.9) erfüllt ist, erhalten wir auf Grund der Hilfssatze (2.1) und (2.2) die Relation

$$f(E(i_1, i_2, \ldots, i_n) = 0, \tag{5.11}$$

für jede kanonische singuläre Matrix. Aus dem Hilfssatz 1.1 folgt, dass (4.11) mit (5.6) äquivalent ist. Der Satz 5.1 wird bewiesen, wenn wir die Funktion ψ in (5.1) folgendermassen definieren: $\psi(\zeta) = 1$, $\zeta \neq 0$, $\psi(0 = 0$.

Wenn die Bedingung (5.10) gilt, nehmen wir die Relation

$$X \cdot E(1, 1, \ldots, 1) = E(1, 1, \ldots, 1), \tag{5.12}$$

in Betracht, die für jede pseudostochastische Matrix X erfüllt ist. Aus (5.12) folgt die Identität $f(X) = 1$, für alle $X \in \tilde{S}(n, K)$. Um (5.1) in diesem Falle zu zeigen, nehmen wir $\psi(\zeta) = 1$, für alle ζ aus K an. Auf diese Weise ist der Satz 5.1 vollständig bewiesen worden,

LITERATUR

[1] Gantmaher F. R., Teoriia Matriț, Moskva 1966.
[2] Kucharzewski, M. Uber die Funktionalgleichung $f(a_k^i)\, f(b_k^i) = f(b_a^i a_k^a)$, Publ. Math. Debrecen 6 (3/4), (1959), 181—198.
[3] Kucharzewski M. und Zajtz, A. Eine kanonische Form der pseudostochastischen Matrizen, Zeszyty Naukowe U.J., Krakow, (im Druck).
[4] Kucharzewski M. und Zajtz, A. Einige Bemerkungen über die multiplikative Funktionalgleichung für stochastische Matrizen, (in Vorbereitung).

SOLUȚIA GENERALĂ A ECUAȚIEI FUNCȚIONALE MULTIPLICATIVE PENTRU MATRICI PSEUDOSTOCHASTICE

(REZUMAT)

Fie $A\,(a_{ij})$, $i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,m$ o matrice peste corpul comutativ K. Conform definiției 1 o astfel de matrice se numește pseudostohastică, dacă satisface condiției (1). Se știe [3] că matricele pătratice pseudostohastice de același rang n formează față de înmulțire un semigrup cu element unitate, iar cele regulate formează grup. Acestea se vor nota cu $\tilde{S}\,(n,K)$ respectiv $S\,(n,K)$.

În lucrarea de față se determină soluția generală a ecuației funcționale multiplicative (2) pentru funcțiile f definite sau pe $S\,(n,K)$ sau pe $\tilde{S}\,(n,K)$. O altă lucrare se va ocupa de funcțiile f definite pe matrici stohastice.

Lucrarea se compune din 5 paragrafe. În primele trei paragrafe se demonstrează unele proprietăți ale matricilor pseudostohastice, cu ahutorul lor se deduce soluția generală a ecuației funcționale (2).

În paragraful 4 se dă soluția generală a ecuației (2) pe matrici pătratice pseudostohastice prin

Teorema 4.1. Orice soluție multiplicativă $f: S\,(n,K)\to K_1$ are forma (4.1) unde $\varphi: K\to K_1$ este funcție multiplicativă arbitrară (K_1 este un corp comutativ arbitrar).

În paragraful 5 se dă soluția generală a ecuației funcționale (2) pe matrici pătratice pseudostohastice și regulate prin

Teorema 5.1. Orice soluție multiplicativă $f: \tilde{S}\,(n,K)\to K_1$ are forma (5.1) unde ψ este o funcție multiplicativă arbitrară care aplică pe K în K_1.

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПСЕВДОСТОХАСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ

(РЕЗЮМЕ)

Пусть $A(a_{ij})$, $i=1, 2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,$ m матрица в коммутативном корпусе. По определению 1 такая матрица называется псевдостохастической,, если выполняется условие (1). Известно, что квадратичные

псевдостохастические матрицы, той же степени n составляют относительно умножения полугруппу с единичным элементом, а регулярные состовляют группу. Они обозначаются соответственно $S(n, K)$, $\tilde{S}(n, K)$.

В настоящей работе приводится общее решение функционального мультипликативного уравнения (2) для функций f определенных на $S(n, K)$ или на $\tilde{S}(n, K)$. В другой работе будут рассматриваться стохастические матрицы. В работе 5 параграфов. В первых трех доказываются некоторые свойства псевдостохастических матриц при помощи которых выводится общее решение функционального уравнения (2). В параграфе 4 приводится общее решение уравн. (2) на квадратичных псевдостохастических матрицах при помощи теоремы 4.1., а в параграфе 5 при помощи теоремы 5.1.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T. Seria Matematică-Fizică-Mecanică teoretică şi aplicată. Tomul 16(30), Fasc. 2/1971.

REMARKS CONCERNING THE GENERAL SOLUTION OF A FUNCTIONAL EQUATION

BY

M. KUCZMA (KATOWICE)

Dedicated to Professor Octavian Emilian Gheorghiu on the occasion of his 50th birthday

§ 1. The construction of the general solution of the functional equation

$$\varphi[f(x)]=g(x,\varphi(x)) \tag{1}$$

has been described in [2], [3], [7] (cf. also [5], Chapter 1), essentially under the assumption that the function $g(x,y)$ is invertible with respect to y. In that case a solution φ of equation (1) is completely determined on any orbit (the definition is given below, in §2) by its value at a single point of the orbit. However, in the case where the invertibility condition is not fulfilled, the situation may be different. In [4] we have shown on the example of a particular linear homogeneous equation

$$\varphi[f(x)]=g(x)\varphi(x) \tag{2}$$

that it may happen that the values of the solution may be prescribed arbitrarily on infinitely many points of one orbit.

In the present paper we study more thoroughly the construction of the general solution of equation (2), where the variable x lies in an arbitrary set E, whereas the values of the functions g (given) and φ (unknown) are in a commutative field Φ. We construct a set $A\subset E$ such that every function defined on A and with values in Φ admits a unique extension onto E to a solution of (2). The construction makes use of the axiom of choice.

Let us note that Şt. Balint [1] and H. Ludescher [6] have proved that equation of the general form

$$E(x,\varphi(x),\ \varphi[f(x)])=0 \tag{3}$$

may be reduced to a (possibly infinite) system of equations of form (1) with invertible g. (A similar idea was also pointed out in [2], but in a more special case and has not been worked out in details). Teoretically this solves comple-

tely the problem of the general solution of equation (3); however, in [1] and [6] the authors do not describe the construction of the system involved. We propose here another approach (in the particular case of equation (2)) and it may depend on the particular equation in question which approach turns out to be more convenient and useful.

§2. In the present section we give some results (partially known) concerning the iterates of the function f. We assume that f is a given map of a set E (of an arbitrary nature) into itself:

$$f: E \to E. \tag{4}$$

In view of (4) the natural iterates f^n of f are defined for every non-negative integer n, in the whole of E, by the equalities

$$f^0(x)=x, \quad f^{n+1}(x)=f(f^n(x)), \quad n=0, 1, 2, \ldots, \quad x \in E.$$

We write $x \iota y$ if there exist non-negative integers n,m such that $f^n(x)=f^m(y)$. The relation ι is an equivalence relation in E (cf. *e.g.* (3], [7], [5]) and the equivalence classes under ι are called *orbits*. The orbit of a point $x \in E$ will be denoted by $C(x)$.

For a positive integer k we define E_k as the set of those points $x \in E$ for which there exists an integer $j \geqslant 0$ (depending on x) such that

$$f^{j+k}(x)=f^j(x), \tag{5}$$

and (5) does not hold for a smaller $k>0$ with any integer $j \geqslant 0$. The smallest integer $j>0$ for which (5) holds will be denoted by $J_k(x)$.

The set of those $x \in E$ for which (5) does not hold with any $k>0$ and $j \geqslant 0$ will be denoted by E_0. Thus we have

$$E=\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k.$$

Every set E_k has property that together with a point x it contains the wohle orbit $C(x)$ ([5], p. 16).

Lemma 1. For every $k \geqslant 1$ in every orbit $C \subset E_k$ there are exactly k points x with the property $J_k(x)=0$.

Proof. Let an $x \in C$ ful fil(5). Then $x_1=f^j(x)$ fulfils $f^k(x_1)=x_1$, *i.e.* $J_k(x_1)=0$. The pionts

$$x_i=f^{i-1}(x_1), \quad i=1, \ldots, k, \tag{6}$$

are all distinct (in view of the minimality of k) and all fulfil the condition $J_k(x_i)=0$ In fact, $f^k(x_i)=f^{k+i-1}(x_1)=f^{i-1}(f^k(x_1))=f^{i-1}(x_1)=x_i$. It remains to show that in C there are no other points witht this property.

Suppose that a point $x_0 \in C$ fulfils the condition $f^k(x_0)=x_0$. Since $x_0 \iota x_1$, the are integes n, m such that

$$f^n(x_0)=f^m(x_1). \tag{7}$$

Let $n=pk+r$, $m=qk+s$, where p, q, r, s are non-negative integers, $r<k$, $s<k$. Then (7) implies that

$$f^r(x_0)=f^s(x_1),$$

whence

$$x_0=f^k(x_0)=f^{k-r}(f^r(x_0))=f^{k-r}(f^s(x_1))=f^{k-r+s}(x_1).$$

Now, $k-r+s=dk+i-1$, where $d=0$ or 1 and $1\leqslant i\leqslant k$. Hence $x_0=f^{i-1}(x_1)=x_i$, *i.e.* x_0 is one of points (6), which was to be proved.

A finite sequence of points

$$[x_1, \ldots, x_N] \tag{8}$$

will be called a *chain* if, for each $1\leqslant i\leqslant N-1$, we have either $x_{i+1}=f(x_i)$ or $x_i=f(x_{i+1})$. A one-point sequence $[x_1]$ will also be regarded as a chain.

Note that every two points x_i, x_{i+1} of a chain are in the relation ι: $x_i \iota x_{i+1}$. Therefore every chain is contained in one orbit.

Chain (8) is called *irreducible* if all its points are distinct.

Lemma 2. From every chain (8) we may obtain an irreducible chain with the same initial and final elements by deleting suitable elements.

Proof. Supposing $x_i=x_j$ $(i<j)$ in (8), the sequence $[x_1, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_N]$ id also a chain. By repeating, if necessary, this procedure we arrive finally at an irreducible chain. (*If* $x_1=x_N$, then $[x_1]$ is the suitable irreducible chain).

A point x_p of chain (8), $1<p<N$, such that $x_p=f(x_{p-1})=f(x_{p+1})$ is called a *paek*. The point x_N is a peak *if* $x_N=f(x_{N-1})$, and x_1 is a peak if $x_1=f(x_2)$. In the case of a one-element chain $[x_1]$, x_1 is a peak.

Lemma 3. If an irreducible chain (8) is contained in E_n, $n\neq 2$, then it has exactly one peak.

Proof. This is clear in the case of a one-element chain, so we may assume that chain (8) has more than one element. Further, it is impossible that for two elements x_i, x_{i+1} of (8) we have simultaneously

$$x_{i+1}=f(x_i) \text{ and } x_i=f(x_{i+1}); \tag{9}$$

for (9) implies $f^2(x_i)=x_i$, contrary to the assumation that $n\neq 2$.

First suppose that $x_2=f(x_1)$, and let $1<p\leqslant N$ be the largest index such that $x_i=f(x_{i-1})$ for $i=2, \ldots, p$. Them x_p is a peak and obviously the only one *if* $p=N$. If $p<N$, then $x_p=f(x_{p+1})$, and we must have

$$x_j=f(x_{j+1}) \tag{10}$$

for $j=p, \ldots, N-1$. In fact, supposing the contrary, let $s>p$ be the smallest index such that $x_{s+1}=f(x_s)$. But (10) holds for $j=s-1$, *i.e.* $x_{s-1}=f(x_s)$, whence $x_{s-1}=x_{s+1}$, which contradicts the assumption that chain (8) is irreducible. Thus (10) holds for $j=p, \ldots, N-1$, which shows that x_p is the only peak of (8).

Now suppose that $x_1=f(x_2)$. Then we must have (10) for $j=1, \ldots, N-1$ by the same argument as above. Therefore x_1 is the only peak of chain (8).

The assumption $n\neq 2$ was needed only to exclude possiblity (9). Therefore if a chain contained in E_2 has more than one peak, then each of them must fulfil the condition $f^2(x_p)=x_p$. In view of Lemma 1 in one chain we may have at most two such points. Hence we get

Lemma 4. If an irreducible chain (8) is contained in E_2, then it has one or two peaks. If it has two, x_p and x_q, then $f^2(x_p)=x_p$, $f^2(x_q)=x_q$.

Lemma 5. If $x_1, x_N \in E_n$, $n\leqslant 2$, and if there exists an irreductible chain (8) from x_1 to x_N, then it is unique.

Proof. In case $N=1$ this is clear. Suppose that $N>1$ and that

$$[y_1,\ldots,y_M] \tag{11}$$

is an irreducible chain such that $x_1=y_1$, $x_N=y_M$. It follows that $M>1$.

First assume that $x_1=f(x_2)$ and $y_1=f(y_2)$. Then we must have (10) for $j=1,\ldots,N-1$ and

$$y_j=f(y_{j+1}) \tag{12}$$

for $j=1,\ldots,M-1$. Since $x_N=y_M$, (10) and (12) imply that $x_{N-\nu}=y_{M-\nu}$ for $\nu=0,\ldots,\min(M,N)-1$, and, since (8) and (11) are irreducible chains, we infer hence that $N=M$ and both chains are identical.

Now assume that $x_2=f(x_1)$ and $y_2=f(y_1)$ and let p and q be the largest indices such that

$$x_{i+1}=f(x_i) \text{ for } i=1,\ldots,p-1, \tag{13}$$

$$y_{i+1}=f(y_i) \text{ for } i=1,\ldots,q-1, \tag{14}$$

respectively. It follows from (13) and (14) that $x_i=y_i$ for $i=1,\ldots,\min(p,q)$. If $\min(p,q)=N$ or M, then in view of the irreducibility of chains (8) and (11) we obtain $p=q=M=N$ and both chains are identical. If $p=q<\min(M,N)$, then the chains $[x_p,\ldots,x_N]$ and $[y_p,\ldots,y_M]$ are of kind considered previously and hence they must be identical; therefore also (8) and (11) are identical. So we are left with the case $p\neq q$, say $p<q$, and $\min(p,q)=p<\min(N,M)$. The thing to show is that the chains $[x_p,\ldots,x_N]$ and $[y_p,\ldots,y_M]$ are identical, where we have

$$x_p=f(x_{p+1}),\ y_{p+1}=f(y_p). \tag{15}$$

This is equivalent to the third posibility

$$x_1=f(x_2),\ y_2=f(y_1). \tag{16}$$

(The case where $x_2=f(x_1)$ and $y_1=f(y_2)$ is analogous and may be left out of considerations, since the role of chains (8) and (11) is quite symmetric).

So let us assume that (16) holds. Then we have (10) for $j=1,\ldots,N-1$. Let q be the largest index such that (14) holds. Relation (10) implies that

$$x_1=f^{N-1}(x_N), \tag{17}$$

and by (14) we have

$$y_q=f^{q-1}(y_1). \tag{18}$$

If $q<M$, then its definition yields the relation $y_q=f(y_{q+1})$, whence it follows that (12) holds for $j=q, \ldots, M-1$, and we obtain

$$y_q=f^{M-q}(y_M)=f^{M-q}(x_N). \tag{19}$$

If $q=M$, (19) is obviously also true.

Now we have two possibilities: either $N-1\leqslant M-q$, or $M-q<N-1$. In the former case it follows from (17) and (14) (cf. also (19)) that $x_1=y_1$ is one of the points $y_q, \ldots, y_M$, which contradicts the irreducibility of chain (11). Therefore necessarily $M-q<N-1$, which leads to the non-contradictory conclusion that y_q is one if the points of chain (8), and

$$x_1=f^{N-1}(x_N)=f^{N-M+q-1}(f^{M-q}(x_N))=f^{N-M+q-1}(y_q). \tag{20}$$

Now we get by (20) and (18)

$$x_1=f^{N-M+q-1}(y_q)=f^{N-M+2q-2}(y_1)=f^{N-M+2q-2}(x_1), \tag{21}$$

and similary by (18) and (20) (remembering that $x_1=y_1$)

$$y_q=f^{N-M+2q-2}(y_q). \tag{22}$$

The iteration index $N-M+2q-2$ occurring in (21) and (22) must be minimal; otherwise chains (8) and (11) woult not be irreducible. Thus

$$N-M+2q-2=n. \tag{32}$$

The inequality $M-q<N-1$ may be written as $N-M+q-1\geqslant 1$. The definition of q omplies that $q\geqslant 2$, *i.e.* $q-1\geqslant 1$. Thus (23) yields the inequality $n\geqslant 2$, which in view of our assumption $n-2$ implies that $n=2$, This is possible only if the two summands in the relation

$$n=(N-M+q-1)+(q-1)$$

are both equal to one, *i.e.* $q=2$ and $N=M$. If $N=M=2$, chains (8) and (11) must be identical in virtue of the relations $x_1=y_1$, $x_2=x_N=y_M=y_2$. If $M>2=q$, then we have (12) for $j=2, \ldots, M-1=N-1$, which together with (10) (valid for $j=1, \ldots, N-1$) implies that $x_j=y_j$ for $j=2, \ldots, N=M$. But $x_1=y_1$ by supposition, so again chains (8) and (11) must be identical. Thas complets the proof.

Note that case (16) was just that where one chain had two distinct peaks: $x_1=y_1$ and $x_2=y_2$.

The assumption $n\leqslant 2$ was used only in the final part of the proof. In case $n\geqslant 3$ we shall still have relations (21) and (22) with (23), and in the more general situation where (16) is replaced by (15)

$$x_p=f^n(x_p),\ y_q=f^n(y_q),$$

and

$$n=N-M+2q-2p. \tag{24}$$

(Note that y_q occuring in the discussion of case (16) and that occurring in the previous part of the proof are identical, since they are peaks of chain (11), which in case $n\geqslant 3$ is unique). x_p and y_q are the peaks of the corresponding chains, and let us assume that that *e. g.* $p<q$. (If $p=q$, then chains (8) and (11) are identical; cf. the proof of Lemma 5). Then we have

$$x_i=y_i \text{ for } i=1,\ldots,p, \tag{25}$$

and

$$x_{N-\nu}=y_{M-\nu} \quad \text{for} \quad \nu=0,\ldots,M-q. \tag{26}$$

Write $s=N-M+q$ so that $x_s=y_q$. In case where chains (8) and (11) are not identical, the points

$$x_{p+1},\ldots,x_s,y_p,\ldots,y_{q+1} \tag{27}$$

must be all distinct. In fact, $x's$ and $y's$ are distinct in view of the irreducibility of the chains. Suppose that $x_k=y_l$ with $p+1\leqslant k\leqslant s$, $p\leqslant l\leqslant q-1$. But $x_p=f^{k-p}(x_k)$ and $y=f^{l-p}(y_p)$, whence

$$x_k=y_l=f^{l-p}(y_p)=f^{l-p}(x_p)=f^{l+k-2p}(x_k).$$

But, since $k\leqslant s=N-M+q$ and $l<q$, we have $l+k-2p<N-M+2q-2p=n$, which is impossible.

The number of points (27) is $s-p+(q-1)-(p-1)=s+q-2p=N-M+2q-2p=n$ and, as is easily cheked, all these points have the property that

$$f^n(x_k)=x_k,\ f^n(y_l)=y_l,\ k=p+1,\ldots,s;\ l=p,\ldots,q-1. \tag{28}$$

Summarizing the conclusions obtained, we hawe the following.

Lemma 6. If (8) and (11) are two non-identical irreducible chains with the property that $x_1=y_1$ and $x_N=y_M$ (and then necessarily $x_1, x_N\in E_n$, $n\geqslant 3$), and if x_p, y_q are the peaks of (8) and (11), respectively, $p<q$, then relations (24), (25), (26) and (28) hold, where $s=N-M+q$.

It may proved that in care $n\geqslant 3$, there can exist at most two non-identical irreducible chains from x_1 to x_N, but this fact will not be needed in the sequel.

§ 3. Now let g be a function defined on E and with values in a commutative field Φ. Put

$$K=f(g^{-1}(0)) \tag{29}$$

and

$$E^*=E\setminus K. \tag{30}$$

We introduce a relation λ in E^*. We say that points $x, y\in E^*$ are in the relation λ, and write $x\lambda y$, if there exists a chain (8) such that $x_1=x$, $x_N=y$, and

$x \in E^*$ for $i=1,\ldots,N$. The relation λ clearly is an equivalence relation and E^* splits into disjoint classes of equivalent elements. The class containing an $x \in E^*$ will be denodet by $\Lambda(x)$.

$x \lambda y$ implies $x \iota y$ (but not conversely), and hence, for every $x \in E^*$, we have

$$\Lambda(x) \subset C(x).$$

If $g(x) \neq 0$ in E, then $K=\emptyset$, $E^*=E$, and then (and only then) $\lambda=\iota$.

A class $\Lambda \in E^*/\lambda$ is called *free* if the following three conditions are fulfilled:

$$(i)\ \Lambda \frown f(K)=\emptyset.$$

(ii) If there is $x \in \Lambda$ such that $x \in E_n$ and $J_n(x)=0$, $n \geqslant 1$, then

$$\prod_{t=1}^{n-1} g[f^t(x)]=1. \tag{31}$$

(iii) If $x \in \Lambda$ and $f(x) \in K$, then $g(x)=0$.

Let A be a set containing exactly one element of every free class $\Lambda \subset E^*$. (Here we make use of the axiom of choice). The solution of equation (2) may be prescribed arbitrarily on the set A, as may be seen from the following.

T h e o r e m. Let E be an arbitrary set and Φ an arbitrary commutative field, and let $f: E \to E$ and $g: E \to \Phi$ be given functions. Let K and E^* be defined by (29) and (30), and let A be an arbitrary set containing exactly one element of every free class $\Lambda \subset E^*$. Then for every function $\varphi_0: A \to \Phi$ there exists exactly one solution $\varphi: E \to \Phi$ of equation (2) in E fulfilling the condition

$$\varphi(x)=\varphi_0(x) \quad \text{for} \quad x \in A. \tag{32}$$

This solution is defined as follows. If $x \in E^*$, the class $\Lambda(x)$ is free, $x_1=A \frown \Lambda(x)$, and (8) is an irreducible chain such that $x_N=x$, then

$$\varphi(x)=\frac{\prod_{t=0}^{p-1} g(x_t)}{\prod_{t=p+1}^{N} g(x_t)}\,\varphi_0(x_1), \tag{33}$$

where x_p is the peak of chain (8), and $\prod_a^b = 1$ for $a>b$. If $x \in K$, or $x \in E^*$ but the class $\Lambda(x)$ is not free, then

$$\varphi(x)=0. \tag{34}$$

Proof. (I). First we must prove that relation (33) and (34) define the function $\varphi(x)$ uniquely. Suppose that $x \in E^*$, the class $\Lambda(x)$ is free, $x_1=A \frown \Lambda(x)$ and (8) is an irreducible chain with peak x_p and such that $x_N=x$. If $N=p$, then the denominator in (33) is 1 by definition. Suppose that $N>p$ and that for some $p+1 \leqslant i \leqslant N$ we hawe $g(x_t)=0$. Since p is a peak, we have (10)for $j=p,\ldots,N-1$, and in particular $x_{t-1}=f(x_t)$, $1 \leqslant p \leqslant i-1 \leqslant N-1$. This means that $x_{i-1} \in f(g^{-1}(0))=K$, contrary to the assumption that all elements of chain (8) are in E^*. Consequently the denominator on the rihgt hand side of (33) cannot vanish.

Now suppose that chain (8) has two peaks: x_p and x_q, $p<q$. Then by Lemma 3 x_1, $x_N \in E_2$ and by Lemma 4 $x_p=f^2(x_p)$, $x_q=f^2(x_q)$. Now, for $\bar{x}=f(x_p)\neq x_p$ (since $x_p \notin E_1 \neq E_2$) we have $f^2(\bar{x})=f^3(x_p)=f(f^2(x_p))=f(x_p)=\bar{x}$. By Lemma 1 it follows that $\bar{x}=x_q$ so that $x_q=f(x_p)$. It further follows that $q=p+1$, since otherwise $[x_1,\ldots,x_p, x_q,\ldots, x_N]$ would be an irreducible chain from x_1 to x_N distinct from (8), which is impossible in view of Lemma 5.

The two expressions (33) resulting by choosing x_p and x_{p+1} as the peak differ by the factor $g(x_p)\,g(x_{p+1})$. But this factor is equal to 1 on ground of condition (31) ($n=2$). Thus (33) does not depend on the choice of the peak.

Now suppose that there are two distinct chains, (8) and (11), such that $x_1=y_1$ and $x_N=y_M=x$. Then, besides (33), we have the alternative expression

$$\varphi(x)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{q-1} g(y_i)}{\prod\limits_{i=q+1}^{M} g(y_i)}\,\varphi_0(x_1), \tag{35}$$

where $q>p$ is the peak of chain (11). By Lemma 6 expressions (33) and (35) differ by the factor

$$\prod_{i=p}^{q-1} g(y_i)\quad \prod_{i=p+1}^{s} g(x_i).$$

But this factor again is equal to 1 on ground of condition (31), since points (27) are all distinct, fulfil condition (28) and their number is n, and hence, by Lemma 1, they must coincide with the points $x_p, f(x_p),\ldots, f^{n-1}(x_p)$. Consequently (33) not depend on the choice of the chain, either.

(II) Now we prove that the function φ given by (33) and (34) actually satisfies equation (2) in E. Fix an arbitrary $x\in E$. We mist distinguish several cases.

1. $x\in K$. Then $\varphi(x)=0$. If $f(x)\in K$. then $\varphi[f(x)]=0$, too. If $f(x)\in E^*$, then $f(x)\in \Lambda(f(x))\frown f(K)$, which mens that the class $\Lambda(f(x))$ is not free and $\varphi[f(x)]=0$. Thus we have in either case $\varphi(x)=\varphi[f(x)]=0$ and relation (2) holds.

2. $x\in E^*$, but class $\Lambda(x)$ is not free, Then $\varphi(x)=0$. If $f(x)\in K$, then $\varphi[f(x)]=0$, too. If $f(x)\in E^*$, then $x\lambda f(x)$ ($[x, f(x))]$ being the corresesponding chain), whence $f(x)\in\Lambda(x)$ and $\varphi[f(x)]=0$. Thus we have in either case $\varphi(x)=\varphi[f(x)]=0$ and relation (2) holds.

3. $x\in E^*$ and the class $\Lambda(c)$ is free, but $f(x)\in K$. Then $\varphi[f(x)]=0$ and by condition (*iii*) of a free class, $g(x)=0$. Consequently relation (2) is fulfilled.

4. $x\in E^*$, $f(x)\in E^*$, and the class $\Lambda(x)$ is free. Then $f(x)\in\Lambda(x)$. Let (8) be an irreducible chain such that $x_1=A\frown\Lambda(x)$, $x_N=x$. Then $\varphi(x)$ is by given formula (33). We must distinguish further subcases.

4a. $f(x)$ is an element of chain (8), say $f(x)=x_i$, $1\leqslant i\leqslant N$. If $i=N$, *i.e.* $f(x)=x$, then by (31) $g(x)=1$ and equation (2) is fulfilled. If $i<N$, then we

may assume that $i=N-1$, for otherwise $[x_1, \ldots, x_i, x_N]$ is an irreducible chain from x_1 to x_N, and as we have already shown (33) does not depend on the choice of the chain. The relation $x_{N-1}=f(x_N)$ shows that $x=x_N$ is not a peak of (8). Thus $p<N$.

$[x_1, \ldots, x_{N-1}]$ is an irreducible chain from x_1 to $f(x)$ with peak at x_p. Consequently

$$\varphi[f(x)]=\frac{\prod_{i=1}^{p-1} g(x_i)}{\prod_{i=p+1}^{N-1} g(x_i)}\varphi_0(x_1). \tag{36}$$

By (33) and (36) $\varphi[f(x)]=g(x_N)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$, *i.e.* equation (2) is fulfilled.

4b. $f(x)$ is not an element of chain (8) Then $[x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}]$, with $x_{N+1}=f(x)$, is an irreducible chain from x_1 to $f(x)$, and $f(x)=x_{N+1}$ is its peak. Consequently

$$\varphi[f(x)]=\prod_{i=1}^{N} g(x_i)\varphi_0(x_1). \tag{37}$$

We must also have $x_N=f(x_{N-1})$, for otherwise $f(x)$ would be an element of chain (8). Thus x_N is the peak of (8), and (33) reduces to

$$\varphi(x)=\prod_{i=1}^{N-1} g(x_i)\varphi_0(x_1). \tag{38}$$

By (38) and (37) $\varphi[f(x)]=g(x_N)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$, *i.e.* equation (2) is fulfilled.

(III) It is clear that the function $\varphi(x)$ fulfils condition (32).

(IV) It remains to prove that $\varphi(x)$ is the only function which satisfied equation (2) in E and fulfils condition (32). For this purpose suppose that $\varphi(x)$ is a function with these properties. We are going to show that it is given by formulea (33) and (34).

If $x\in K$, then there exists an $\bar{x}$ such that $x=f(\bar{x})$ and $g(\bar{x})=0$. By (2) $\varphi(x)=\varphi[f(\bar{x})]=g(\bar{x})\varphi(\bar{x})=0$.

Now suppose that $x\in E^*$, but the class $\Lambda(x)$ is not free. First consider the case where $\Lambda(x)\frown f(K)\neq\Phi$, say, $\bar{x}\in\Lambda(x)\ f(K)$. Then $\bar{x}=f(x')$ with $x'\in K$. Hence $\varphi(\bar{x})=\varphi[f(x')]=g(x')\varphi(x')=0$, since, as has just been shown, φ vanisches on K. Let (8) an irreducible chain such that $x_1=x$, $x_N=x$, $x_i\in E^*$ for $i=1, \ldots, N$, and let x_p be its peak. We have shown in the beginning of the part I of the proof that

$$g(x_i)\neq 0 \tag{39}$$

for $i=p+1, \ldots, N$, and similary it can be shown that (39) holds for $i=1, \ldots, p-1$. Since x_p is a peak, we have $x_{i+1}=f(x_i)$ for $i=1, \ldots, p-1$, and $x_{i-1}=f(x_i)$ for $i=p+1, \ldots, N$. Hence we obtain by induction, making use of (2),

$$\varphi(x_p)=\prod_{i=1}^{p-1} g(x_i)\varphi(x_1) \quad \text{and} \quad \varphi(x_p)=\prod_{i=p+1}^{N} g(x_i)\varphi(x_N),$$

whence in view of (39) (valid $i\neq p$)

$$\varphi(x_N)=\frac{\prod_{i=1}^{p-1} g(x_i)}{\prod_{i=p+1}^{N} g(x_i)}\varphi(x_1), \tag{40}$$

and $\varphi(x)=\varphi(x_N)=0$ rezults from the that $\varphi(x_1)=\varphi(\bar{x})=0$. Note that in order to derive (40) we have only made use of the fact that (8) is an irreducible chain from x_1 to x_N with peak at x_p and that $x_i\in E^*$ for $i=1,\ldots,N$.

Next we consider the case where there is an $\bar{x}\in\Lambda(x)$ such that $\bar{x}\in E_n$ and $J_n(\bar{x})=0$, $n\geqslant 1$, and

$$\prod_{i=0}^{n-1} g[f^i(\bar{x})]\neq 1. \tag{41}$$

Making use of (2) we obtain

$$\varphi[f^n(\bar{x})]=\prod_{i=0}^{n-1} g[f^i(\bar{x})]\varphi(\bar{x}), \tag{42}$$

and since $f^n(\bar{x})=\bar{x}$, it follows by (41) and (42) that $\varphi(\bar{x})=0$. Now, taking an irreducible chain (8) with peak at x_p and such that $x_1=\bar{x}$, $x_N=x$ and $x_i\in E^*$ for $i=1,\ldots,N$, we obtain from (40) $\varphi(x)=0$.

Finally suppose that there is an $\bar{x}\in\Lambda(x)$ such that $f(\bar{x})\in K$ and $g(\bar{x})\in 0$. Since φ vanishes on K, the relation $\varphi[f(\bar{x})]=g(\bar{x})\varphi(\bar{x})$ implies that $\varphi(\bar{x})=0$, and we obtain $\varphi(x)=0$ as previously, making use of relation (40).

The cases considered so far have shown that (34) holds for $x\in K$ and $x\in E^*$ such that $\Lambda(x)$ is not free. Now suppose that $x\in E^*$ and the class $\Lambda(x)$ is free. Put $x_1=A\frown\Lambda(x)$ and let (8) be an irreducible chain with peak at x_p and such that $x_N=x$, $x_i\in E^*$ for $i=1,\ldots,N$. Then formula (33) results from (40) and (32).

This completes the proof.

REFEEENCES

[1] Balint Şt., Uber die iterativen Funktionalgleichunghen ersten Ranges. Universitatea din Timişoara, Facultatea de matematică-Mecanică, Seminarul de ecuaţii Funcţionale 2 (1969), 1—15.

[2] Kuczma, M. General solutinon of the functional equation $\varphi[f(x)]=G(x,\varphi(x))$. Ann. Polon. Math. 9 (1960), 275—284.

[3] Kuczma, M. Third note on the general solution of a fuctional qeuation. Ann. Polon. Math. 17 (1965), 179—1
Math. 17 (1965), 179—192.

[4] Kuczma, M. On a theorem of M. Ghermanescu. Zeszyty Naukowe Universitetu Jagiellonskiego, Prace Mat. 11 (1966), 31—39.

[5] Kuczma, M. Functional equation in a single variable, Monografir Mat. 46, Warszwa, 1969.

[6] Ludescher, H. Asupra a două ecuaţii funcţional-interative echivalente (to appeart).

[7] Reghis M. et Vuc, L. Sur les équations functionnelles itératives. I. Publicationes Math. Debrecen 13 (1966), 25—38.

Silesian University
Katowice, Poland

ПРИМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

(РЕЗЮМЕ)

Автор дает общее решение функционального уравнения

$$\varphi[f(x)] = g(x)\,\varphi(x)$$

где $f: E \to E$ и $g: E \to \Phi$ данные функции, а $\varphi: E \to \Phi$ незнакомая функция. E произвольне множество, а множество Φ обладает алгебраической структурой поля.

OBSERVAŢII PRIVIIND SOLUŢIA GENERALĂ A UNEI ECUAŢII FUNCŢIONALE

(REZUMAT)

Autorul construieşte soluţia generală a ecuaţiei funcţionale

$$\varphi[f(x)] = g(x)\varphi(x)$$

unde $f: E \to E$ şi $g: E \to \Phi$ sînt funcţii date, iar $\varphi: E \to \Phi$ este funcţia necunoscută. E este o mulţime arbitrară, iar mulţimea Φ este inzestrată cu structura algebrică de cîmp.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată. Tomul 16(30),
Fasc. 2/1971.

A FUNCTIONAL EQUATION RELATED TO GENERALIZED CONVEXITY

Dedicated to Professor O. Em.
Gheorghiu for his 50 th anniversary.

P. M. VASIĆ and J. D. KEČKIĆ

0. In studying a concept of generalised convexity (see [1]), we came accross the following functional equation

$$f(x)\,g(y,z)+f(y)\,g(z,x)+f(z)\,g(x,y)=0. \tag{1}$$

As can easily be seen, equation (1) generalise equation

$$f(u,x)\,f(y,z)+f(u,y)\,f(z,x)+f(u,z)\,f(x,y)=0, \tag{2}$$

which was considered in papers [2] – [4].

Equation (2) was generalised in paper [5], where the following, more general functional equation

$$\alpha f(u,x)\,f(y,z)+\beta f(u,y)\,f(z,x)+\gamma f(u,z)\,f(x,y)=0 \tag{3}$$

where α, β, γ are complex constants, was solved.

In this paper we shall determine the general solution (in real and complex domain) of the functional equation

$$\alpha f(x)\,g(y,z)+\beta f(y)\,g(z,x)+\gamma f(z)\,g(x,y)=0, \tag{4}$$

which generalises equations (1), (2) and (3).

Equation (4) is clearly satisfied for $f(x)=0$ or $g(x,y)=0$ or $\alpha=\beta=\gamma=0$, and so we do not consider those cases in the sequel.

Throughout this paper R will denote the set of all real numbers, C the set of all complex numbres, and Δ the value of the determinant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}.$$

1. Theorem 1. If $\alpha, \beta, \gamma \in R$, and $f: R \to R$, $g: R^2 \to R$, then the general solution of equation (4) is given by the following table:

1. If $\Delta \neq 0$, then $f(x) \equiv 0$ and $g: R \times R \to R$ arbitrary. or $g(x, y) \equiv 0$, and $f: R \to R$ arbitrary

2. Let $\Delta = 0$.

2.1. If $\alpha+\beta+\gamma=0$, then

$$g(x, y) = cf(x) f(y), \tag{5}$$

where $c \in R$ is an arbitrary constant, and $f: R \to R$ is an arbitrary function.

2.2 If $\beta+\alpha+\gamma \neq 0$, and $\alpha=\beta=\gamma$, then

$$g(x, y) = f(x) G(y) - f(y) G(x), \tag{6}$$

where $f, G: R \to R$ are arbitrary functions.

2.3. If $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, and $\alpha \neq \beta$, $\beta \neq \gamma$, $\gamma \neq \alpha$, then

$$g(x, y) = 0. \tag{7}$$

Theorem 2. If $\alpha, \beta, \gamma \in C$, $f: C \to C$, $g: C^2 \to C$, then the general solution of functional equation (4) is given by:

1. If $\Delta \neq 0$, then $f(x) \equiv 0$ and $g: C \times C \to C$ arbitrary or $g(x, y) \equiv 0$ and $f: C \to C$ arbitrary.

2. Let $\Delta = 0$.

2.1 If $\alpha+\beta+\gamma=0$ and $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \neq 0$, then the general solution is given by (5) where $c \in C$ is an arbitrary constant and $f: C \to C$ is an arbirtiary function.

2.2 If $\alpha+\beta+\gamma=0$ and $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$, then

$$g(x, y) = \sqrt{\alpha}\, f(x) G(y) + \sqrt{\beta}\, f(y) + G(x) + K f(x) f(y), \tag{8}$$

wherw $K \in C$ arbitrary constant, and $f, G: C \to C$ are arbitrary functions.

2.3. If $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ and $\alpha=\beta=\gamma$, the general solution is given by (6) where $f, G: C \to C$ are arbitrary functions.

2.4. If $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ and $\alpha \neq \beta$ or $\beta \neq \gamma$ or $\gamma \neq \alpha$, then the general solution is given by (7).

2. We shall now give a joint proof of both theorems. Proof. Equation (4) together two of is equivalent forms generates the following system

$$\alpha f(x) g(y, z) + \beta f(y) g(z, x) + \gamma f(z) g(x, y) = 0 \tag{4}$$

$$\beta f(x) g(y, z) + \gamma f(y) g(z, x) + \alpha f(z) g(x, y) = 0 \tag{9}$$

$$\gamma f(x) g(y, z) + \alpha f(y) g(z, x) + \beta f(z) g(x, y) = 0. \tag{10}$$

This system in $f(x)\, g(y, z)$, $f(y)\, g(z, x)$, $f(z)\, g(x, y)$ will have nontrivial solutions if and only if

$$\Delta = (\alpha+\beta+\gamma)\left((\alpha-\beta^2)+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right)=0.$$

Case 1. Let $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha=0$, $\beta\neq 0$, $\gamma\neq 0$. Equation (4) becomes

$$f(y)\,g(z,x)=f(z)\,g(x,y). \tag{11}$$

Since $f(x)\neq 0$, there exists a number a ($\in C$ or R) such that $f(a)\neq 0$. Putting $z=a$ in (11) we get

$$g(x,y)=\varphi(x)\,f(y), \tag{12}$$

where $\varphi(x)=g(a,x)/f(a)$.

Substituting (12) into (11) we find

$$f(x)\,g(y)\,\varphi(z)=f(y)\,f(z)\,\varphi(x),$$

which for $x=y=a$, yields

$$\varphi(z)=cf(z),$$

with $c=\dfrac{\varphi(a)}{f(a)}$.

This, together with (12), finally leads to (5).

Similar rezults are obtained for $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, $\gamma=0$, and $\alpha\neq 0$, $\beta=0$, $\gamma\neq 0$.

Case 2. Let $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, $\gamma\neq 0$ and $f(a)\neq 0$. Equation (4) for $z=a$ becomes

$$g(x,y)=f(x)\,G(y)+H(x)\,f(y), \tag{13}$$

where

$$G(y)=\frac{-\alpha}{\gamma f(a)}\,g(y,a), \quad H(x)=\frac{-\beta}{\gamma f(a)}\,g(a,x).$$

Substituting (13) into (4) we find

$$\alpha f(x)\,(f(y)\,G(z)+H(y)\,f(z))+\beta f(y)\,(f(z)\,G(x)+H(z)\,f(x))=$$
$$=(\alpha+\beta)\,f(z)\,(f(x)G(y)+H(x)\,f(y)). \tag{14}$$

Putting $x=z=a$ in (14) we get

$$H(y)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\,G(y)+Kf(y), \tag{15}$$

$$\text{with } K=\frac{\alpha H(a)-(\alpha+\beta)\,G(a)}{\alpha f(a)}.$$

In virtue of that, (13) becomes

$$g(x,y)=f(x)\,G(y)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\,f(y)\,G(x)+Kf(x)f(y). \tag{16}$$

If (16) is to satisfy (4) we must have

$$(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\,(f(x)\,(f(x)\,f(y)\,G(z)-f(y)\,f(z)\,G(x))=0. \tag{17}$$

There are two possibilities:

1° If $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$ (which is possible only if $\alpha, \beta \in C$), then (17) is identically satisfied, and therefore (16) represents the general solution of (4) and can be written in the form (8).

2° If $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\neq 0$, putting $x=y=a$, in (17), we get

$$G(z)=cf(z),$$

where $c=\frac{G(a)}{f(a)}$, and (16) takes the form of (5).

Case 3. Let $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. Adding equations (4), 9 and (10), and taking into account $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, we get (1), wohse general solution is ginev by (5) (consult [1]), where f, G are arbitrary real or complex functions. Subituing (6) into (4) we find

$$(\alpha-\beta) f(x) f(y) G(z)+(\beta-\gamma) f(y) f(z) G(x)+(\gamma-\alpha) f(z) f(x) G(y)=0. \quad (18)$$

If $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$, this condition is identically satisfied. Suppose, for example, that $\alpha\neq\beta$. Setting $x=y=a$, (18) yields

$$G(z)=cf(z), \quad (19)$$

with $c=\frac{G(a)}{f(a)}$, and substituting (19 into (6) we get

$$g(x, y)=0.$$

We obtain the same result for $\beta\neq\gamma$ or for $\gamma\neq\alpha$.

This completes the proof of Theorems 1 and 2.

REFERENCES

[1] Vasic P. M. and Keckic, J. D. A generalisation of the concept of convexity, Matematicki Vesnik (to appear).

[2] Mitrinovic D. S. Presic, S. B. Sur une équation cyclique non liniaére, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 254 (1962). 611—613.

[3] Mitrinovic D. S Presic, S. B. Sur une équation fonctionnelle cyclique d,ordre supérieur. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehnuc. Fak. Ser. Mat. Fit. N°—76 (1962), 1—2.

[4] Mitrinovic, D. S. Presic. S. B. Une calsse d,équation fonctionnelles homogène de second degré, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fan. der. Mat. Fiz. N°—70 N°-70-N°-76 (1962), 3—6.

[5] Vasic, P. M. Equation fonctionnelle du second ordre dont la solution genérale dasn le domain de variables complex peut etre déterminée, Univ. Beograd. Publ. Elek trotehn. Fak. Mat. Fit. N°-115-N°-121 (1963),13—16.

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СВЯЗАНОЕ С ПОНЯТИЕМ ОБОБЩЕННОЙ КОНВЕКСНОСТИ

(РЕЗЮМЕ)

Авторы определяют общее вещественное и комплексное решение функционального уравнения :

$$\alpha f(x)\, g(y, z)+\beta f(y)\, g(z, x)+\gamma f(z)\, g(x, y)=0.$$

O ECUAŢIE FUNCŢIONALĂ LEGATĂ DE CONVEXITATEA GENERALIZATĂ

(REZUMAT)

Autorii determină soluţia generală reală şi complexă a ecuaţiei funcţionale

$$\alpha f(x)\, g(y, z)+\beta f(y)\, g(z, x)+\gamma f(z)\, g(x, y)=0.$$

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T Seria Matematică-Fizică-Mecanică teoretică şi aplicată. Tomul 16(30), Fasc. 2/1971.

SUR L'EQUATION FONCTIONNELLE DE JENSEN-CARMICHAEL

PAR

B. CRSTICI

Hommage au Professeur Octavian Em. Gheorghiu a l'occasion de son 50-e anniversaire.

1. Dans les séances du groupe des chercheurs dans le domaine des équations fonctionnelles, dont il est le chef, Prof. Octavian Em. Gheorghiu a attiré plusieurs fois l'attention des collaborateurs sur quelques aspects intéressants de l'équation fonctionnelle

$$f(x+y)\,f(x-y)=f(x)^2-f(y)^2 \tag{1}$$

Après J.L.W.V. Jensen [1] et R.D. Carmichael [2], cette équation a été étudiée par beaucoup d'auteurs (D.N. Seiliger, D.M. Sinzow, W.H. Wilson, R.A. Rosenbaum–S.L. Segal, S. Kurepa), parmi lesquels nous mentionnons N. Ciorănescu [3].

Dans la présente note nous considérons une variante du type de Pexider de l'équation (1)

$$f(x+y)\,g(x-y)=f(x)\,g(x)-f(y)\,g(y) \tag{2}$$

et nous appliquons les résultats trouvés dans l'etude de l'équation (1) pour les fonctions matrices du deuxième ordre d'argument réél.

2. Soit donc l'équation fonctionnelle (2) avec les fonctions inconnues f et g réelles d'une variable réelle.

Lemme 1. Quelle que soit la fonction g vérifiant l'équation (2), avec f non identiquement nulle, on a $g(0)=0$.

Démonstration. Nous posons, dans (2) $x=y=\frac{t}{2}$ et nous obtenons $f(t)\,g(0)=0$, d'où résulte la propriété énoncée.

Remarque 1. Si $f(x)=0$, $\forall x\in R$ alors g est une fonction arbitraire. Par la suite nous laissons de coté les solutions

$$\begin{array}{ll} f(x)\equiv 0 & ,g \text{ fonction arbitrarie} \\ f \text{ fonction arbitrarie}, & g(x)\equiv 0 \end{array} \tag{3}$$

de l'équation fonctinnelle (2).

Lemme 2. La fonction g solution de l'équation (2) est impair.

Démonstration. En faisant $x=0$ dans (2) nous obtenons

$$f(y)\,[g(y)+g(-y)]=0$$

d'où résulte le lemme. (Voir la remarque 1).

Lemme 3. Si les fonctions f et g vérifient l'équation fonctionnelle (2) alors la fonction

$$H(x,z)=\frac{f(x+z)-f(x-z)}{2g(z)} \tag{4}$$

ne dépend pas de z, c'est-á-dire $H(x,z)=h(x)$

Démonstration. Nous écrivons l'équation (2) sous la forme équivalente

$$f(x)\,g(y)=f\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{x+y}{2}\right)-f\left(\frac{x-y}{2}\right)g\left(\frac{x-y}{2}\right). \tag{5}$$

Alors nous avons

$$H(x,z)=\frac{1}{g(z)\,g(y)}\,[f(x+z)\,g(y)-f(x-z)\,g(y)]. \tag{6}$$

Compte tenu de l'équation (5) nous avons

$$f(x+z)\,g(y)=f\left(\frac{x+y+z}{2}\right)g\left(\frac{x+y+z}{2}\right)-f\left(\frac{x-y+z}{2}\right)g\left(\frac{x-y+z}{2}\right),$$

$$f(x-z)\,g(y)=f\left(\frac{x+y-z}{2}\right)g\left(\frac{x+y-z}{2}\right)-f\left(\frac{x-y-z}{2}\right)g\left(\frac{x-y-z}{2}\right).$$

La paranthèse dans formule (6) devient, en groupant convenablement les termes et en tenant compte de nouveau de l'équation (5)

$$f(x+z)\,g(y)-f(x-z)\,g(y)=f\left(\frac{x+y+z}{2}\right)g\left(\frac{x+y+z}{2}\right)-f\left(\frac{x+y-z}{2}\right)g\left(\frac{x+y-z}{2}\right)-$$

$$-\left[-f\left(\frac{x-y-z}{2}\right)g\left(\frac{x-y-z}{2}\right)+f\left(\frac{x-y+z}{2}\right)g\left(\frac{x-y+z}{2}\right)\right]=$$

$$f(x+y)\,g(z)-f(x-y)\,g(z)$$

Donc

$$H(x,z)=\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2g(y)}=H(x,y).$$

Lemme 4. Si la fonction f vérifie l'équation (2), alors les fonctioms f^+ (la partie paire) et f^- (la partie impaire) vérifient aussi la même équation et réciproquement.

Démonstration. On a

$$f^+(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad f^-(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

$$f(x)=f^+(x)+f^-(x). \tag{7}$$

En substituant dans (2) $f(x)$ par l'expression donnée par la formule (7) nous obtenons

$$f^+(x+y)\,g(x-y)+f^-(x+y)\,g(x-y)=$$

$$=f^+(x)\,g(x)-f^+(y)\,g(y)+f^-(x)\,g(x)-f^-(y)\,g(y) \tag{8}$$

Dans (8) nous substitouns x par $-x$ et y par $-y$ et nous tenons compte de lemme 2. Nous avons alors

$$-f^+(x+y)\,g(x-y)+f^-(x+y)\,g(x-y)=$$

$$=-f^+(x)\,g(x)+f^+(y)\,g(y)+f^-(x)\,g(x)-f^-(y)\,g(y) \tag{9}$$

De (8) et (9) nous obtenons

$$f^+(x+y)\,g(x-y)=f^+(x)\,g(x)-f^+(y)\,g(y). \tag{10}$$

$$f^-(x+y\,g(x-y)=f^-(x)\,g(x)-f^-(y)\,g(y) \tag{11}$$

ce qui achève la démonstration.

Lemme 5. Si les fonctions f et g sont solutions de l'équation (2), alors la fonction

$$K(x,z)=\frac{g(x+z)-g(x-z)}{2f^-(z)} \tag{12}$$

ne dépend pas de z, c'est-à-dire $K(x,z)=k(x)$.

Démonstration. Cell-ci s'accomplit d'une manière analogue comme celle du lemme 3. On doit tenir compte aussi du lemme 4.

Lemme 6. Les fonctions g et f^-, solutions de l'équation (2) sont liées par la relation

$$g(x)=Af^-(x)$$

Démonstration. On a

$$f^-(x)\,g(y)=f^-\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{x+y}{2}\right)-f^-\left(\frac{x-y}{2}\right)g\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$f^-(y)\,g(x)=f^-\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{x+y}{2}\right)-f^-\left(\frac{x-y}{2}\right)g\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

donc

$$f^-(x)\,g(y)=f^-(y)\,g(x)$$

d'où la propriété.

Lemme 7. Les fonctions h_1 et k, ou

$$h_1(x)=\frac{f^-(x+z)-f^-(x-z)}{2g(z)}$$

vérifient la première généralisation wilsonienne de l'équation de D'Alembert

$$h_1(x+y)+h_1(x-y)=\frac{2}{A}h_1(x)\,k(y). \tag{13}$$

Démonstration. Nous avons

$$\frac{2}{A}h_1(2x)\,k(2y)=\frac{1}{2Ag(2z)\,f^{-}(2z)}[f^{-}(2x+2z)-f^{-}(2x-2z)]\,[g(2y+2z)-$$

$$-g(2y-2z)]=\frac{1}{2Ag(2z)\,f^{-}(2z)}[f^{-}(x+y+2z+x-y)\,g(x+y+2z-(x-y))-$$

$$-f^{-}(x+y+2z+x-y)\,g(x+y-2z-(x-y))-f^{-}(x+y-2z+x-y)\,g(x+y+2z-$$

$$-(x-y))+f^{-}(x+y-2z+x-y)\,g(x+y-2z-(x-y))]=$$

$$=\frac{1}{2Ag(2z)\,f^{-}(2z)}[f^{-}(x+y+2z)\,g(x+y+2z)-f^{-}(x-y)\,g(x-y)+$$

$$+f^{-}(x-y+2z)\,g(x-y+2z)-f^{-}(x+y)\,g(x+y)-f^{-}(x+y)\,g(x+y)+$$

$$+f(x-y-2z)\,g(x-y-2z)+f^{-}(x+y-2z)\,g(x+y-2z)-f(x-y)\,g(x-y)]=$$

$$=\frac{1}{2Ag(2z)\,f^{-}(2z)}[f^{-}(2x+2y+2z)\,g(2z)-f^{-}(2x+2y-2z)\,g(2z)+$$

$$+f^{-}(2x-2y+2z)\,g(2z)-f^{-}(2x-2y-2z)\,g(2z)]=h_1(2x+2y)+h_1(2x-2y).$$

Théorème 1. La solutoin générale continue (mesurable) de l'équation fonctionnelle (2) est doneé par les formules

$$\begin{aligned}
&f(x)=B\cos bx+C\sin bx\ ,\ g(x)=C_1\sin bx\\
&f(x)=B\,\mathrm{ch}\,bx+C\,\mathrm{sh}\,bx\ ,\ g(x)=C_1\,\mathrm{sh}\,bx\\
&f(x)=B+Cx\ ,\ g(x)=C_1x\\
&f(x)\equiv 0\ ,\ g\ \text{arbitraire}\\
&f\ \text{arbitraire}\ ,\ g(x)\equiv 0
\end{aligned}\tag{14}$$

où B, C, C_1, b sont des constantes arbitraires.

Démonstration. Nous avons

$$f^{-}(x+y)-f^{-}(x-y)=2g(y)\,h_1(x)$$

$$f^{-}(x+y)+f^{-}(x-y)=2g(x)\,h_1(y)$$

$$f^{-}(x+y)+f^{-}(x-y)=2Af^{-}(x)\,h_1(y)$$

d'Où (voir [4]) compte tenu de l'imparité de la fonction f^{-} :

$$f^{-}(x)=C\sin bx,\ f^{-}(x)=C\,\mathrm{sh}\,bx,\ f^{-}(x)=Cx.\tag{15}$$

Donc, compte tenu de lemme 6, nous avons

$$g(x)=C_1\sin bx,\ g(x)=C_1\,\mathrm{sh}\,bx,\ g(x)=C_1x\tag{16}$$

La fonction f^+ sera determinée comme il suit. On a

$$f^+(x+y)\,g(x-y)=f^+(x)\,g(x)-f^+(y)\,g(y)$$

$$f^+(x-y)\,g(x)+y=f^+(x)\,g(x)+f^+(y)\,g(y)$$

$$f^+(0)\,g(t)=2f^+\left(\frac{t}{2}\right)g\left(\frac{t}{2}\right),\quad f^+(x)=f^+(0)\,\frac{g(2x)}{2g(x)}\,.$$

Donc

$$f^+(x)=B\cos bx,\quad f^+(x)=B\,\mathrm{ch}\,bx,\quad f^+(x)=B \tag{17}$$

Le théorème 1. résulte de (15), (16), (17), compte tenu de (7) et de (3).

Remarque 2. Par rapport au cas particulier $f=g$ (l'équation (1) de J-CM), l'équation (2) présente une variété plus grande de solutions.

3. Soit maintenant L'équation fonctionnelle (1) pour les fonctions

$$f:\mathbf{R}\to M_{2,2}$$

où $M_{2,2}$ signifie l'algèbre des matrices carrées du deixième ordre sur $\mathbf{R}$

$$f(x)=\begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x)\end{bmatrix},\quad f_{ik}:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad i=1,2\,;\ k=1,2. \tag{18}$$

Lemme 8. La matrice $f(0)$ est nilpotente de l'indice 2.

Démonstration. On pose $x=y=0$ dans (1).

Lemme 9. Si

$$f(0)=\begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{19}$$

alors la matrice solution de l'équation (1) est de la forme

$$f(x)=\begin{bmatrix} 0 & \varphi(x) \\ 0 & \Psi(x)\end{bmatrix}. \tag{20}$$

Démonstration. En posant dans (1) $x=y=\frac{t}{2}$ on obtient

$$f(t)\,f(0)=0$$

d'où on déduit la propriété énoncée.

Lemme 10. Les fonctions φ et Ψ de (20) vérifient le système d'équations fonctionnelles

$$\begin{aligned}\varphi(x+y)\,\psi(x-y)&=\varphi(x)\,\psi(x)-\varphi(y)\,\psi(y)\\ \psi(x+y)\,\psi(x-y)&=\psi(x)^2-\psi(y)^2\end{aligned} \tag{21}$$

Démonstration. En introduisant (20) dans (1) il résulte le système (21).

Théorème 2. La solution continue de l'équation (1) pour les fonctions (18) dans le cas (19) est donnée par les formules

$$f(x)=\begin{bmatrix}0 & \lambda(x)\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad f(x)=\begin{bmatrix}0 & B+Cx\\ 0 & C_1x\end{bmatrix}$$
$$f(x)=\begin{bmatrix}0 & B\cos bx+C\sin bx\\ 0 & C_1\sin bx\end{bmatrix},\quad f(x)=\begin{bmatrix}0 & B\,\mathrm{ch}\,bx+C\,\mathrm{sh}\,bx\\ 0 & C_1\,\mathrm{sh}\,bx\end{bmatrix} \tag{22}$$

où C, C_1, b sont des constantes arbitraires et λ est une fonction arbitrarie avec $\lambda(0)=B$.

Démonstration. Le théorème 2. résulte en écrivant la solution génerale continue du système (21). La deuxième équation est l'équation de *J-CM* (voir [4]), tandis que la première nous l'avons résolue dans la première partie de la note.

Remarque 3. Si

$$f(0)=D^{-1}\begin{bmatrix}0 & B\\ 0 & 0\end{bmatrix}D \tag{23}$$

où D est une matrice nonsingulière, nous considérerons la fonction

$$F(x)=D\,f(x)\,D^{-1} \tag{24}$$

qui vérifie l'équation (1) en même temps avec f. Pour F nous avons $F(0)=\begin{bmatrix}0 & B\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, donc la solution générale est donneé par (22). On passe alors *a f* par la formule (24), c'est-àdire

$$f(x)=D^{-1}F(x)\,D. \tag{25}$$

A la fin nous voulons mentionner encore une fois que nous avons considéré l'équation (1) pour les fonctions (18) seulement dans le cas (19) (ou (23)), comme une application de la première partie de la note.

Institut Polytechnique „Traian Vuia"
de Timişoara
Le département mathématique n° 1 (Faculté
d'éléctrotechnique)

BIBLIOGRAPHIE

1. Jensen, J. L. W. V. Om Fundamentalligningers Oplösning ven elementära Midler, Tidsskrift Math. (4), 2 (1878), 149—155.
2. Carmichael, R. D. On Certain Functional Equations. Amer. Math. Monthly, *16* (1909), 180—183.
3. Cioranesco, N. Sur les équations fonctionnelles du cosinus et du sinus circulaires et hyperboloques. Enseign. Math. *31* (1933), 67—74.
4. Aczél, J. Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Andwendungen. Berlin 1961.
5. Vincze, E. Komplex valtozos trigonometriai fuggvényegyentleek megoldasa, néhany alkalmasa és altalanositasa. 1—137. Miskolc Egyetemvaros 1961.

О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ЙЕНСЕНА-КАРМАЙКЛА

(РЕЗЮМЕ)

Находится общее непрерывное решение функционального уравнения

$$f(x+y)\,g(x-y)=f(x)\,g(x)-f(y)\,g(y).$$

Найденные результаты применяются для решения функционального

$$f(x+y)\,f(x-y)=f(x)^2-f(y)^2$$

уравнения для матриц.

ASUPRA ECUAŢIEI FUNCŢIONALE A LUI JENSEN-CARMICHAEL

(REZUMAT)

Se găseşte soluţia generală continuă a ecuaţiei funcţionale

$$f(x+y)\,g(x-y=f(x)\,g(x)-f(y)\,g(y)$$

Rezultatele găsite se aplică la rezolvarea ecuaţiei funcţionale

$$f(x+y)\,f(x-y)=f(x)^2-f(y)^2$$

pentru funcţii matrici pătratice de ordinul al doilea de argument real în cazul

$$f(0)=\begin{bmatrix}0 & B\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată. Tomul 16(30),
Fasc. 2/1971.

ASUPRA SPAŢIILOR FIBRATE CU GRUP STRUCTURAL $GA(n, R)$. (II)*.

DE

I. P. POPESCU

Distins omagiu profesorului O. Em. Gheorghiu la a 50-a aniversare

Prin $A(V_n, GA)$ înţelegem un spaţiu fibrat principal, asociat în mod natural unei varietăţi diferenţiabile V_n şi care este echivalent cu fibratul principal al reperelor afine [6].

Conexiunile infinitezimale pe *S.F.P.* $A(V_n, GA)$ sînt cunoscute sub numele de *conexiuni afine generalizate* pe V_n [4, pg. 90], [1, pg. 365], [3, pg. 127], spre a fi distinse de *conexiunile liniare* pe V_n, care sînt conexiuni initezimale în fibratul principal al reperelor liniare pe V_n şi care în terminologia clasică se cunoaşte sub numele de conexiuni afine. După cum se ştie [1, pg. 367], [3, pg. 128], o conexiune afină generalizată pe o varietate diferenţiabilă V_n, corespunde la o pereche $\overset{A}{\Gamma}(L, D)$ unde L este o conexiune lineară pe V_n iar D un cîmp tensorial de tip $\binom{1}{1}$ pe V_n. În ipoteza că D este tensorul lui Kronecker, conexiunea $\overset{A}{\Gamma}$ poartă numele de *conexiunea afină* [3, pg. 129].

În cele ce urmează, pentru simplificarea exprimării, vom folosi terminologia de *conexiune afină* pe V_n pentru conexiunile infinetizimale în $A(V_n, GA)$ adică pentru conexiunile afine generalizate pe V_n, specificînd atunci cînd este cazul, conexiunile afine (D=tensorul lui Kronecker) prin terminologia *conexiuni afine canonice.*

Scopul lucrării este de a face o expunere a conexiunilor afine $\overset{A}{\Gamma}$ într-un mod direct, folosind coordonatele locale. În acest fel, pe lîngă faptul că regăsim unele lucruri cunoscute, avem posibilitatea de a introduce elemente noi, ca de exemplu cîmpurile bazice şi forma canonică 0 care ne permite să punem în evidenţă tensorii asociaţi unei conexiuni afine.

---

* Prezenţa notă este o continuare a lucrării [6].

§ 3. CONEXIUNI INFIMITEZINLE PE $A(V_n, GA)$.

O conexiune infinitezimală pe un spațiu fibrat principal $P(V_n, G)$ se poate introduce în mai multe moduri, evident echivalente [3. pg. 63], [5, pg. 259]. Vom reaminti trei din cele mai frecvente căi:

A. Cu ajutorul unei *distribuții* Δ dată pe spațiul total P, care satisface condițiile

$A_1)$ $T_z = G_z \oplus \Delta_z$, $\quad \forall z \in P$;

$A_2)$ $dR_a \Delta_z = \Delta_{za}$, $\quad \forall a \in G, z \in P$;

$A_3)$ Δ este diferențiabilă.

B. Cu ajutorul *formei fundamentale* ω, care satisface condițiile

$B_1)$ $\omega(A^*) = A$, $\quad \forall A \in \mathfrak{L}(G)$;

$B_2)$ $R_a^* \omega = \text{adj. } a^{-1} \cdot \omega$, $\quad \forall a \in G$;

$B_3)$ ω este diferențiabilă.

C. Cu ajutorul formelor locale de conexiune $\{\overset{\alpha}{\omega}\}$ definite pe zonele geometrice $\{U_\alpha\}$ le unei acoperiri deschise a spațiul bază V_n, cu valori în algebra Lie $\mathfrak{L}(G)$ și care satisfac condiției

$$\underset{\beta}{\omega} = \text{adj. } \varphi_{\beta\alpha}^{-1} \cdot \underset{\alpha}{\omega} + \varphi_{\beta\alpha}^* \theta, \tag{1}$$

unde $\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$, sînt funcțiile structurale ale *S.F.P.* considerat, iar θ, 1 — forma canonică stîng invarantă pe G, definită prin $\theta(A) = A$, $\forall A \in \mathfrak{L}(G)$.

Dacă ținem seama se șirul de aplicații

$$T_x(V_n) \xrightarrow{d\varphi_{\beta\alpha}} T_{\varphi_{\beta\alpha}(x)}(G) \xrightarrow{dL_{\varphi_{\beta\alpha}^{-1}(x)}} T_e(G) \xrightarrow{L'} \mathfrak{L}(G), \; x \in U_\alpha \cap U_\beta. \tag{2}$$

rezultă că,

$$\varphi_{\beta\alpha}^* \theta = L' \circ dL_{\varphi_{\beta\alpha}^{-1}(x)} \circ d\varphi_{\beta\alpha}. \tag{3}$$

1. *Formele unei conexiuni.*

Ne propunem să introducem o conexiune infinitezimală pe $A(V_n, GA)$ cu ajutorul formelor locale de conexiune și apoi să determinăm *forma fundamentală a conexiunii* în funcție de formele locale.

Fie V_n o varietate diferențiabilă, $A(V_n, GA)$ *S. P. F.* afin asociat și $\mathfrak{A}_0(h_\alpha(U_\alpha, \chi_\alpha), \alpha \in J)$ un atlas admisibil al lui V_n. Un sistem de forme $\{\overset{\alpha}{\omega}, \alpha \in J\}$ definite respectiv pe zone geometrice $\{U_\alpha, \alpha \in J\}$ ale hărților atlasului $\mathfrak{A}_0$ și cu valori în $\mathfrak{L}(GA)$ determină o conexiune infinitezimală $\overset{A}{\Gamma}$ pe $A(V_n, GA)$ dacă satisface condiția (1) unde G este $GA(n, \mathbf{R})$;

O formă $\underset{a}{\omega}$ fiind cu valori în $\mathfrak{L}(GA)$ se poate scrie sub forma

$$\underset{a}{\omega} = \underset{a}{L^i_j} E^i_I + \underset{a}{D^i} E_I, \tag{4}$$

unde $(\underset{a}{L^I_j}, \underset{a}{D^I})$ sînt forme Pfaff definite pe U_a. Vom zice că $(\underset{a}{L^I_j}, \underset{a}{D^I})$ sînt *componentele formei* $\underset{a}{\omega}$.

Propoziția 1. Pentru o conexiune infinitezimală $\overset{A}{\Gamma}$ *pe* $A(V_n, GA)$ *relația (4) este echivalentă cu sistemul*

$$L^h_k = L^i_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^h}{\partial x^i} + \frac{\partial x'^h}{\partial x^i} d\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\right); \quad D^h = D^i \frac{\partial x'^h}{\partial x^i}. \tag{5}$$

Pentru stabilirea propoziției facem precizarea că $(x^i) = \chi_\alpha(x)$ și $(x'^I) = \chi_\beta(x)$. Atunci $\varphi_{\beta\alpha}(x) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right)_x$. În baza relațiilor (13), § 1 [6], avem

$$\text{adj. } \varphi^{-1}_{\beta\alpha} \cdot \underset{\alpha}{\omega} = \underset{\alpha}{L^i_j} \frac{\partial x'^h}{\partial x^i} E^k_h \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} + \underset{\alpha}{D^i} \frac{\partial x'^h}{\partial x^i} E_h.$$

Pe de altă parte, folosind (3), avem

$$\varphi^*_{\beta\alpha}(x)\,\theta = d\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right)_x \left(\frac{\partial}{\partial a^i_j}\right)_{\varphi_{\beta\alpha}(x)} = d\left(\frac{\partial x^h}{\partial x'^j}\right)_x \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^k}\right)_x (E^k_h)_{\varphi_{\beta\alpha}(x)}.$$

Ținînd seama că ω este tot de forma (4), rezultă (5).

Consecință. Deoarece $(\underset{a}{L^h_k}, \underset{a}{D^h})$ sînt forme Pfaff pe U_a, urmează că $\underset{a}{L^h_k} = \underset{a}{L^h_{ik}} dx^i$, $\underset{a}{D^h} = \underset{a}{D^h_i} dx^i$. Rezultă atunci că $(\underset{a}{L^h_{ik}})$ sînt componentele unei conexiuni lineare iar $(\underset{a}{D^h_i})$ sînt componentele unui cîmp tensorial mixt pe V_n. Prin urmare *o conexiune infinitezimală pe* $A(V_n, GA)$ *determină în mod unic o conexiune liniară și un cîmp tensorial pe* V_n *și reciproc,* [3, pg. 127], [1, pg. 396].

Vom căuta acum să exprimăm *forma fundamentală* a unei conexiuni infinitezimale pe $A(V_n, GA)$ prin formele locale de conexiune.

În cazul unei conexiuni $\overset{A}{\Gamma}$ pe *S.F.P.* $A(V_n, GA)$, forma fundamentală a conexiunii se va scrie

$$\omega = \omega^a_b E^b_a + \omega^a E_a, \tag{6}$$

unde (ω^b_a, ω^a) sînt forme Pfaff definite pe A. Le vom numi *componentele formei* ω.

Propoziția 2. Fie V_n *o varietate deferențiabilă și* $\overset{A}{\Gamma}$ *o conexiune infinitezimală pe S.F.P.* $A(V_n, GA)$. *Dacă* (ω^b_a, ω^a) *sînt componentele formei fundamentale a conexiunii* $\overset{A}{\Gamma}$ *iar* $(\underset{a}{L^I_j}, \underset{a}{D^I})$ *sînt componentele unei forme locale de conexiune* $\underset{a}{\omega}$, *atunci avem relațiile*

$$\omega^a_b = \widetilde{y^a_i}\,(dy^i_b + \underset{a}{L^i_j} y^i_b); \quad \omega^a = \widetilde{y^a_i}\,(dy^i + \underset{a}{L^i_j} y^j + \underset{a}{D^i}). \tag{7}$$

Demonstrație. Componentele formei ω fiind forme Pfaff pe A, într-un sistem de coordonate locale se vor scrie

$$\omega_b^a = \omega_{ib}^a dx^i + \eta_{ib}^a dy^i + \zeta_{ib}^{ca} dy_c^i,$$
$$\omega^a = \omega_i^a dx^i + \eta_i^a dy^i + \zeta_{ci}^{ba} dy_b^i. \tag{8}$$

Din condiția $\omega(A^*) = A$, pentru $\forall A \in \mathfrak{L}(GA)$, deducem

$$\eta_{ib}^a = 0, \quad \zeta_{ib}^{ca} = \tilde{y}_i^a \delta_b^c; \quad \eta_i^a = \tilde{y}_i^a, \quad \zeta_{ci}^{ba} = 0. \tag{9}$$

Pentru determinarea coeficientilor ω_{ib}^a, și ω_i^a vom ține seama de Teorema VII. 1.5. [5. pg. 260]. Vom considera secțiunea locală $f_a : U_a \to A(V_n)$ dată de $f_a(x) = \left(0, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$. Atunci o secțiune locală oarecare $f : U_a \to A(V_n)$ va fi de forma $f(x) = f_a(x) \cdot a(x)$ unde $a : x \in U_a \to a(x) \in GA(n, \mathbf{R})$. În coordonate locale secțiunea f fiind dată de

$$x^i = x^i, \quad y^i = y^i(x), \quad y_a^i = y_a^i(x), \tag{10}$$

rezultă că pentru $z = f(x)$, avem,

$$\omega(df(X)) = \text{adj. } a^{-1}(x). \underset{a}{\omega}(X) + a^*\theta(X), \quad \forall X \in T_x(V_n). \tag{11}$$

Prin calcul direct, în baza relațiilor (10), partea stîngă ne dă

$$\omega(df(X)) = \left(\omega_{jb}^a + \tilde{y}_i^a \frac{\partial y_b^i}{\partial x^j}\right) X^j E_a^b + \left(\omega_j^a + \tilde{y}_i^a \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) X^j E_a.$$

Pe de altă parte, primul termen din partea dreaptă în baza relațiilor (13) § 1. [6], devine

$$\text{adj. } a^{-1}(x) \cdot \underset{a}{\omega}(X) = \tilde{y}_i^a \underset{a}{L_j^i}(X)\, y_b^i E_a^b + \tilde{y}_i^a \left(\underset{a}{L_j^i}(X)\, y^j + \underset{a}{D^i}(X)\right) E_a.$$

Pentru al doilea termen ținînd seama că avem o relație de forma (3) unde $\varphi_{\beta a}$ se înlocuiește cu a, obținem

$$a^*\theta(X) = \tilde{y}_i^a\, dy_b^i(X)\, E_a^b + \tilde{y}_i^a\, dy^i(X))\, E_a,$$

astfel încît rezultă,

$$\omega_{kb}^a = \tilde{y}_i^a \underset{a}{L_{kj}^i} y_a^j, \quad \omega_k^a = \tilde{y}_i^a \left(\underset{a}{D_k^i} + y^j \underset{a}{L_{kj}^i}\right),$$

și prin urmare (7).

2. *Existența conexiunilor afine pe V_n.* Cu privire la existența globală a conexiunilor afine pe o varietate diferențiabilă se poate enunța.

Prepoziția 3. Pe o varietate diferențiabilă paracompatică V_n, există cel puțin o conexiune afină.

Într-adevăr, din teorema lui *Whitney* [2, pg. 100], care afirmă existența unei metrici riemanniene pe o varietate diferențiabilă paracompactă, rezultă existența unei conexiuni lineare (L) pe varietatea respectivă. Perechea (L, δ_i^j) formată din această conexiune și tensorul lui *Kronecker*, conform consecinței de mai sus, determină o conexiune afină pe V_n.

Cu privire la mulțimea conexiunilor afine $\{\overset{A}{\Gamma}\}$ ce se pot defini pe o varietate diferențiabilă V_n se poate enunța.

Propoziția 4. Mulțimea $\{\overset{A}{\Gamma}\}$ se poate structura ca spațiu punctual afin

În adevăr presupunînd date două conexiuni afine $\overset{A}{\Gamma}$ și $\overset{A}{\bar{\Gamma}}$ prin coeficienții de conexiune (L_{jk}^i, D_j^i) respectiv ($\bar{L}_{jk}^i$, $\bar{D}_j^i$), se poate defini o aplicație $\psi : \{\overset{A}{\Gamma}\} \to T^{n^3+n^2}$ prin relația,

$$\psi(\overset{A}{\Gamma}, \overset{A}{\bar{\Gamma}}) = (\bar{L}_{jk}^i - L_{jk}^i, \quad \bar{D}_j^i - D_j^i), \tag{12}$$

unde T^{n^3} este spațiul linear al tensiunilor de tip $\binom{1}{2}$ pe V_n, iar T^{n^2} este spațiul linnar al tensorilor de tip $\binom{1}{2}$ pe V_n, astfel încît $T^{n^3+n^2} = T^{n^3} \oplus T^{n^2}$. Ținînd deama de cele stabilite în § 1. [6], spațiul de bază este mulțimea $\{\overset{A}{\Gamma}\}$ iar spațiul director $T^{n^3+n^2}$.

3. *Cîmpuri orizontale, cîmpuri bazice.* Vom presupune acum că pe V_n avem dată conexiunea afină $\overset{A}{\Gamma}$ printr-o distribuție Δ pe *S.F.P.* A (V_n, GA). Un cîmp vectorial $Z \in X(A)$ se zice că este *orizontal* dacă aparține distribuției Δ, adică este soluție a sistemului,

$$\omega_b^a(Z) = 0, \quad \omega^a(Z) = 0. \tag{13}$$

Folosind coordonatele locale, deducem că sistemul de cîmpuri orizontale,

$$Z_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - (D_i^j + L_{il}^j y^l) \frac{\partial}{\partial y^i} - L_{il}^j y_a^l \frac{\partial}{\partial y_a^j}, \tag{14}$$

constituie *o bază locală* pentru Δ

Cu privire la aceste cîmpuri se poate enunța.

Propoziția 5. Cîmpurile orizontale Z_i date de (14) sînt lifturile cîmpurilor bazei naturale $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \in X(U)$, în raportcu conexiunea afină $\overset{A}{\Gamma}(L_{jk}^i, D_j^i)$.

Se verifică imediat că avem $d\pi Z_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Cîmpurile Z_i permit să întroducem pe A (V_n, GA) un sistem de cîmpuri orizontale în bijecție cu vectorii $\xi \in \mathbf{R}^n$. Le vom numi *cîmpuri bazice* pe A în

raport cu conexiunea afină $\overset{A}{\Gamma}$. Se generalizează în acest mod cîmpurile bazice definite pe *S.F.P.* al reperelor lineare în raport cu o conexiune lineară [3, pg. 119]. Menţionăm că aceste cîmpuri sînt diferite de cele întroduse în [1, pg. 400]. Acestea din urmă pot fi considerate numai în ipoteza că tensorul (D_j^i) are rangul n.

Vom numi cîmpuri bazice pe A, în raport cu o conexiune $\overset{A}{\Gamma}$, cîmpurile orizontale de forma $B(\xi)=\xi^a B_a$; $\xi(\xi^a)\in \mathbf{R}^n$ unde $B_a=y_a^i Z_i$, Z_i fiind date de (14).

Proprietate. În raport cu translaţiile de dreapta $R_a: z_0\in A\to z_0\cdot a\in A$ *definite* de $a\in GA(n, \mathbf{R})$, *avem satisfăcută relaţia,*

$$\forall\, a\in GA,\quad \xi\in \mathbf{R}^n;\quad dR_a(B(\xi))_{z_0}=(B(a_2^{-1}\xi))_{z_0 a}, \tag{15}$$

unde $a_2=p_2(a)\in G_2$ (p_2 fiind proiecţia întrodusă în [6]).

În adevăr, în baza relaţiilor (5) § 2 [6], deducem

$$dR_a(B(\xi))_{z_0}=\xi^b y_{0b}^i\, dR_a(Z_i)_{z_0}=\xi^b y_{0b}^i (Z_i)_{z_0 a}=\tilde{a}_b^c \xi^b (B_c)_{z_0 a}=((B(a_2^{-1}(\xi)))_{z_0 a}.$$

Dacă vom considera cîmpul $R'_a(B(\xi))$ dat de $(R'_a(B(\xi)))_{z,a}=dR_a(B(\xi))_{z_0}$, atunci (15) se mai poate scrie,

$$R'_a(B(\xi))=B(a_2^{-2}\cdot\xi),\quad a_2=p_2(a). \tag{16}$$

Consecinţă. Cîmpurile (E_a^{b*}, E_a^*, B_a) *definesc o bază globală pe* $X(A)$. *Prin urmare S.F.P. al reprelor afine este o varietate paralelizabilă.*

4. *Forma canonică* θ. Dată o conexiune infinitezimală $\overset{A}{\Gamma}$ pe *S.F.P.* (V_n, GA) se poate completa sistemul de forma Pfaff (ω^a, ω_b^a) cu n forme Pfaaf θ^a astfel încît $(\theta^a, \omega^a, \omega_b^a)$ să fie baza duală bazei (B_a, E_a^*, E_a^{b*}). Din condiţiile

$$\theta^a(E_b^*)=0,\quad \theta^a(E_b^{c*})=0,\quad \theta^a(B_c)=\delta_c^a. \tag{17}$$

deducem

$$\theta^a=y_i^a dx^i. \tag{18}$$

Dacă $B(\xi)$ este un cîmp bazic oarecare, rezultă $\theta^a(B(\xi))=\xi^a$. Prin urmare forma $\theta=\theta^a e_a$, (e_a) fiind baza naturală din R^n, este o formă cu valori în R^n. O vom numi forma canonică a *S.F.P.* $A(V_n, GA)$.

Forma canonică θ are următoarele *proprietăţi*:

1/ este formă orizontală;

2/ $\theta(B(\xi))=\xi,\quad \forall\,\xi\in R^n$;

3/ $\forall\, a\in GA$; $R_a^*\theta=a_2^{-1}\theta$, unde $a_2=p_2(a)$.

Primele două proprietăți sînt imediate. Pentru a treia, luînd $z=z_0\cdot a$ deducem din (15)

$$(R_a^*\theta))_{z_0}(B(\xi))_{z_0}=\theta_z(dR_a(B(\xi))_{z_0})=\theta_z(B(a_2^{-1}\xi))_z=a_2^{-1}(\xi).$$

5. *Ecuațiile de structură.* Sistemul de forme Pfaff (θ^a, ω^a, ω_b^a) constituie o bază pentru $^1\mathfrak{D}(A)$. Prin diferențierea exterioară obținem:

$$d\theta^a=-\omega_c^a\wedge\theta^c+\Theta^a,\quad d\omega^a=-\omega_c^a\wedge\omega^c+\Omega^a,$$
$$d\omega_b^a=-\omega_c^a\wedge\omega_b^c+\Omega_b^a, \tag{19}$$

unde,

$$\Theta^a=\tilde{\tilde{y}}_i^a y_c^j L_j^i\wedge\theta^c,\quad \Omega_b^a=\tilde{\tilde{y}}_i^a y_b^j(dL_j^i-L_j^h\wedge L_h^i),$$
$$\Omega^a=\tilde{\tilde{y}}_i^a[dD^i-D^h\wedge L_h^i+y^j(dL_j^i-L_j^h\wedge L_h^i)], \tag{20}$$

sînt părțile ozriontale ale formelor ($d\theta^a$, $d\omega^a$, $d\omega_b^a$).

Ecuațiile (19) se numesc *ecuațiile de structură* ale spațiului $(A,\overset{A}{\Gamma})$, iar (Θ^a, Ω^a, Ω_b^a) se numesc *diferențialele absolute* (convariante) ale formelor (θ^a, ω^a, ω_b^a). Dacă folosim notațiile

$$T_{jk}^i=2L_{[jk]}^i,\quad R_{jk}^i=2(\partial_{[j}D_{k]}^i-D_{[j}^h L_{k]\,h}^i),$$
$$R_{jkh}^i=2(\partial_{[j}L_{k]\,h}^i-L_{[j\,|\,h\,|}^1 L_{k]\,1}^i), \tag{21}$$

precum și simbolul D al diferențierii absolute pe A, avem

$$\Theta^a\equiv D\theta^a=\tilde{\tilde{y}}_i^a T_{jk}^i y_b^j y_c^k\theta^b\wedge\theta^c,$$
$$\Omega^a\equiv D\omega^a=\tilde{\tilde{y}}_i^a(y^h R_{jkh}^i+R_{ik}^j)y_b^i y_c^k\theta^b\wedge\theta^c, \tag{22}$$
$$\Omega_b^a\equiv D\omega_b^a=\tilde{\tilde{y}}_i^a R_{jkh}^i y_c^j y_d^k y_b^h\theta^b\wedge\theta^c.$$

Vom numi *formă de torsiune* a conexiunii $\overset{A}{\Gamma}$ forma cu valori în R^n.

$$\Theta=\Theta^a e_a, \tag{23}$$

iar *formă de curbură* a conexiunii $\overset{A}{\Gamma}$, forma cu valori în $\mathfrak{L}(GA)$

$$\Omega=\Omega^a E_a+\Omega_b^a E_a^b. \tag{24}$$

Se pun în evidență trei cîmpuri tensoriale pe V_n: cîmpul tensorial de componente T_{jk}^i pe care-l vom numi *torsiunea conexiunii* afine $\overset{A}{\Gamma}$, și cîmpurile tensoriale de componnete R_{jk}^i, R_{jkh}^i pe care le vom numi respectiv *prima*

curbură și *a doua curbură a conexiunii* $\overset{A}{\Gamma}$. Aceste cîmpuri se pot pune în evidență pe o cale duală considerînd croșetele cîmpurilor (E_a^*, E_a^*, B_a). Obținem,

$$[E_a^*, E_b^*]=0, \quad [E_a^*, E_b^{c*}]=-\delta_a^c E_b^*, \quad [E_a^*, B_c^*]=0;$$
$$[E_a^{b*}, E_c^{d*}]=\delta_c^b E_a^{d*}-\delta_a^d E_c^b, \quad [E_a^{b*}, B_c]=-\delta_c^b B_a; \tag{25}$$
$$[B_a, B_b]=-\overset{\approx}{y}{}_i^c y_a^j y_b^k [T_{jk}^j B_c+(R_{jk}^i+y^h R_{jkh}^i) E_c^*+y_d^h R_{jkh}^i E_c^{d*}].$$

Deducem de aici

Propoziția 6. Dacă conexiunea $\overset{A}{\Gamma}$ *are torsiunea nulă, croșetul* $[B_a, B_b]$ *este vertical; dacă conexiunea* $\overset{A}{\Gamma}$ *are ambele curburi nule croșetul* $[B_a, B_b]$ *este orizontal prin urmare distribuța* Δ *ce determină conexiunea* $\overset{A}{\Gamma}$ *este involutivă. In acest ultim caz conexiunea se zice să ceste plată.*

O b s e r v ț i e. În cazul conexiunilor afine canonice $(D_j^i=\delta_j^i)$ avem $T_{jk}^i=R_{jk}^i$. Atunci condiția necesară și suficientă ca o conexiune afină canonică să fie plată, este ca atît torsiunea cît și curbura să fie nule.

6. *Identitățile lui Bianchi.* Prin diferențierea exterioară a ecuațiilor de structură deducem,

$$d\Theta^a=\omega_c^a \wedge \Theta^c-\Omega_c^a \wedge \theta^c,$$
$$d\Omega^a=\Omega_c^a \wedge \omega^c-\omega_c^a \wedge \Omega^c, \tag{26}$$
$$d\Omega_b^a=\Omega_c^a \wedge \omega^c-\omega_c^a \wedge \Omega_b^c.$$

Părțile orizontale ale dormelor $d\Theta^a$, $d\Omega^a$, $d\Omega_b^a$ sînt diferențialele lor absolute. Deducem,

$$D\Theta^a=-\Omega_c^a \wedge \theta^c, \quad D\Omega_c^a=0, \quad D\Omega_b^a=0, \tag{27}$$

relații pe care le vom numi *identitățile lui Bianchi* pentru conexiunea $\overset{A}{\Gamma}$.

În coordonate locale pe V_n, primele două rînduri de identitââi conduc la identitățile cunoscute ale lui Bianchi pentru o conexiune lineară [7, pg. 176], în timp ce ultima identitate conduce la relațiile

$$\partial_{(h} R_{ij)}^k+D_{(h}^1 R_{ij)1}^k=0. \tag{28}$$

7. *Transport paralel, diferențiere convariantă.* Pentru definirea transportului paralel în $A(V_n)$, de-alunngul unui arc regulat de curbă $c: t \to x(t), t \in [a, b]$, din V_n, în raport cu o conexiune afină $\overset{A}{\Gamma}$ ne vom servi de definiția generală a transportului paralel într-un fibrat principal dotat cu o conexiune infinitezimală [3, pg. 68]. În acest scop vom utiliza liftul $c_{z_0}^*: t \to z(t), t \in [a, b]$, al arcu-

lui c, unic determinant de un punct $z_0 \in \overset{-1}{\pi}(x_a)$. Transportul paralel $\tau : \overset{-1}{\pi}(x_a) \to \overset{-1}{\pi}(x_b)$ va fi dat de

$$\tau(z_0) = z(b), \quad \forall\, z_0 \in \overset{-1}{\pi}(x_a). \tag{29}$$

Dacă într-o hartă locală $h \in \mathfrak{A}_0$ curba c dată de parametrizarea $x = x(t)$, $t \in [a, b]$, atunci în $\bar{h} \in \bar{\mathfrak{A}}_0$ liftul său $c^*_{z_0}$ va avea parametrizarea de forma $x^i = x^i(t)$, $y^i = y^i(t)$, $y^i_a = y^i_a(t)$, $t \in [a, b]$. Este posibil întodeauna să alegem funcțiile $y^i(t)$ și $y^i_a(t)$ astfel ca $y^i(a) = 0$, $y^i_a(a) = \delta^i_a$. Scriind că vectorul tangent la $c^*_{z_0}$ este orizontal, deducem

$$\frac{dy^i}{dt} + \frac{L^i_h}{dt} y^h + \frac{D^i}{dt} = 0, \quad \frac{dy^i_h}{dt} + \frac{L^i_h}{dt} y^h_a = 0. \tag{30}$$

Acest sistem diferențial reprezintă condiții locale necesare și suficiente ca funcțiile $y^i(t)$, $y^i_a(t)$ să dea o parametrizare a lui $C^*_{z_0}$.

Deducem de aici un transport paralel în fibratul asociat $TA(V_n)$ [6, § 2. 3] în modul următor: dacă $z_1 = \tau(z_0)$ atunci $\forall\, X_a \in TA_{x_a}(V_n)$ avem $\tilde{\tau}(X_a) = X_b \in TA_{x_b}(V_n)$ dacă și numai dacă $z_0^{-1} \cdot X_a = z_1^{-1} \cdot X_b \in \mathbf{A}^n$, reperele fiind interpretate ca izomorfisme $z : \mathbf{A}^n \to TA_{\pi(z)}(V_n)$.

Observație. Fie $X : t \to X(t) \in TA_{x(t)}(V_n)$ un cîmp punctual definit de-alungul arcului c și $z(t) = (x(t), y(t), y_a(t))$ liftul lui c obținut din reperul natural din $TA_{x_a}(V_n)$ identificat cu $\mathbf{A}^n$. În aceste condiții aplicația $\tilde{\tau}_t^{-1} : TA_{x(t)} V_n) \to TA_{x_a}(V)$ va fi dată de $\tilde{\tau}_t^{-1}(X(t)) = Z_x = z^{-1}(t) \cdot X(t)$.

Ne propunem să stabilim,

Propoziția 7. Fie $X : t \to X(t)$, $t \in [a, b]$, un cîmp de puncte definite de-alungul arcului $c : t \to x(t)$, $t \in [a, b]$, de pe o varietate diferențiabilă V_n dotată cu conexiune $\overset{\mathbf{A}}{\Gamma}(L^i_j, D^i)$. Condiția necesară și suficientă ca acest cîmp să fie paralel dea-lungul lui c este ca componentele $X^i(t)$ în raport cu baza naturală să satisfacă sistemul diferențial.

$$\frac{dX^i}{dt} + \frac{L^i_h}{dt} X^h + \frac{D^i}{dt} = 0. \tag{31}$$

În adevăr dacă X este cîmpul punctual definit mai jos de-alungul lui c și $\xi(\xi^a) = z_0^{-1} \cdot X(a) \in \mathbf{A}^n$, atunci într-o hartă locală a lui $TA(V_n)$ avem

$$X(t) = [y^i(t) + \xi^a y^i_a(t)] \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot$$

Pe de altă parte însă $X(t)=X^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}$. În baza condițiilor (30) rezultă (31). Tensorul,

$$\overset{A}{\nabla}X=(dX^i+L^i_h X^h+D^i)\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{32}$$

nu este altceva decît *diferențiala convariantă afină a cîmpului X*, considerată în [1, pg. 369].

Deducem de aici,

Propoziția 8. Fie $\overset{A}{\Gamma}(L, D)$ *o conexiune afină pe o varietate diferențiabilă* V_n. *Pentru orice cîmp* $X\in X(V_n)$ *avem,*

$$\overset{A}{\nabla}X-\overset{A}{\nabla}x=\overset{L}{\nabla}X, \tag{33}$$

unde x este cîmpul punctelor de contact al varietăților iar $\overset{L}{\nabla}$ *reprezintă diferențierea exterioară în raport cu conexiunea lineară L.*

Într-adevăr cîmpul punctual x e caracterizat prin coordonatele $(X^i=0)$ în reperul natural deci din (32) deducem

$$\overset{A}{\nabla}x=D^i\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{34}$$

Deoarece $\overset{L}{\nabla}X=dX^i+L^i_hX^h$, rezultă (34).

8. *Desfășurare, geodezice.* Fie V_n o varietate diferențiabilă dotată cu o conexiune afină $\overset{A}{\Gamma}(L, D)$ și $c: t\to c(t)$, $t\in(a, b)$ un arc de curbă pe V_n diferențiabil de clasă C^2 cel puțin. Presupunem $[o, t]\subset(a, b)$ și fie $h(U, X)\in\mathcal{A}_0$, astfel ca $c(a, b)\subset U$. Considerăm $x_0=c(0)$ și indentificăm $T_x(V_n)$ cu $\mathbf{R}^n$. Fie $z(y(t), y_a(t))$ familia de repere definită pe $[o, t]$ și obținută din $\left\{0, \frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0}$ prin transport paralel din $c(o)$ în $c(t)$. Considerăm de-alungul lui c două cîmpuri punctuale. Cîmpul determinat de punctele lui c și cîmpul determinat de vectorii tangenți de-alungul lui c. Din fiecare punct al curbei c, transportăm prin paralelism în x_0 cele două cîmpuri de puncte.

În baza observației de la punctul anterior deducem

Propoziția 9. Cîmpul punctual determinat de vectorii tangenți vor fi transportați în $T_{x_0}(V_n)$, *în raport cu reperul* $p_2z(t)=z_2(t)$, *după curba* $Y_t\subset R^n$ *dată de*

$$\xi^a(x)=\tilde{y}^a_i(t)\frac{dx^i}{dt}, \tag{35}$$

iar cîmpul punctelor lui c va fi transportat în raport cu reperul z(t) în curba γ_t *din* $T_{x_0}(V_n)$ *dată de*

$$\xi^a(x)=-\tilde{y}^a_i(t)\,y^i(t). \tag{36}$$

Curba γ_t o vom numi desfășurată curbei c pe fibra tip R^n.

Definiție. Numim curbă geodezică pe V_n în raport cu o conexiune $\overset{\mathbf{A}}{\Gamma}$, o curbă c cu proprietatea că desfășurata sa γ_t este un segment de dreaptă pe R^n.

Propoziția 10. Condiția necesară și suficientă ca o curbă $c: t \to x(t)$ pe V_n, diferențiabilă de clasa C^2 să fie geodezică în raport cu o conexiune $\overset{\mathbf{A}}{\Gamma}$ este ca într-o hartă locală să avem

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{D^i}{dt}\right) + \frac{L^i_j}{dt}\frac{D^j}{dt} = 0. \tag{37}$$

Propoziția rezultă scriind că

$$\frac{d^2\xi^a(x)}{dt^2} = 0$$

și ținînd seama că din (20) deducem

$$\frac{\overset{\approx}{dy^a_i}}{dt} = \overset{\approx}{y^a_j}\frac{L^j_i}{dt}.$$

Observații:

1) Dacă se ține seama de (32) și (33), relațiile (37) se mai pot scrie

$$\frac{\nabla}{dt}\left(\frac{\overset{\mathbf{A}}{\nabla x}}{dt}\right) = 0, \tag{38}$$

formă sub care sînt date în [1].

2) Dacă se consideră *conexiunea afină canonic asociată unei conexiuni liniare,* adică conexiunea afină pentru care $D^i_j = \delta^i_j$, atunci deducem

$$\frac{d\xi^a(x)}{dt} = \xi^a(x), \tag{39}$$

și deci are loc *Propoziția 4.1.* dată în [3. pg. 131]. În acest caz desfășurata unei geodezice pe R^n, identificat cu $T_x(V_n)$, este un segment de dreaptă ce admite drept vector de direcție vectorul tangent la c în x.

FACULTATEA DE MATEMATICĂ
UNIVERSITATEA TIMIȘOARA

BIBLIOGRAFIE

1. Cateno-Gasperini, I., Sulle connessioni infinitesimali nelle spazio fibrato dei riferimenti affini di una V_n. Rend. Mat. (3—4), 1958, vol. 17.
2. Choquen-Bruhat, Y., Géométrie différentielle et systémes extérieurs ; Dunod, Paris, 1968.
3. Kobayashi, S., Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry, vol. I.* 1963.
4. Lichnerowicz, A., Théorie globale des conexions et des groups d'holonomie. Ed. Cremonese, Roma, 1955.

5. Papuc D., Albu A., Elemente de geometrie diferențială globală. Tipigrafia Universității Timișoara 1970.
6. Popescu P. I., Asupra spațiilor fibrate cu grup structural $GA(N,R)$ Bul. Inst. Politehnic vol. 16, (30) 1971.
7. Vrănceanu, G,. *Lecții de geometrie diferențială,* vol. I., Ed. Didactică și Pedagogică 1962.

К РАССЛОЕННЫМ ПРОСТРАНСТВАМ СО СТРУКТУРАЛЬНЫМ ГРУППОМ $GA(n, R)$ (II)

(РЕЗЮМЕ)

Данная заметка является продолжением заметки [6]. Проводится изложение аффинных связностей $\overset{A}{\Gamma}$ прямым образом, употребляя локальные координаты. Таким образом, получаются некоторые известные результаты и вводятся новые элементы, как например, базисные поля и каноническая форма θ, которые позволили учесть присоединенные тенсоры к аффинной связности. Определяются геодезические аффинной связности $\overset{A}{\Gamma}$.

SUR LES ESPACES FIBRES A GROUPE STRUCTUREL $GA(n, R)$. (II)

(RESUME)

La présente note est une continuation de la note [6]. On y expose les connexions affines $\overset{A}{\Gamma}$ d'une manière directe, en employant les cpordonnées locales. De cette manière, excepté les résultats déja connus qu'on a retrouvé, on a pu introduire des élémentents nouveaux, tels que : les champe de base et la forme canonique θ, qui ont permis de mettre en évidance les tenseurs associés à une connexion affine. On détermine ensuite les géodésiques d'une connexion affine $\overset{A}{\Gamma}$.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T. Seria Matematică-Fizică-Mecanică teoretică şi aplicată. Tomul 16(30), Fasc. 2/1971.

EINE NEUE KLASSE VON LOSUNGEN EINER FUNKTIONALGLEICHUNG

VON

J. TĂUBER

Meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. O. Em. Gheorghiu zu seinem 50. Geburtstag gewidmet.

A. D. Alexandrov hat in [2] folgende Funktionalgleichung

$$f(\bar{L}+x)=f(\bar{L})+f(x),\ x>0 \text{ oder } x\geqslant 0 \tag{1}$$

gelöst, wobei $f:\bar{L}\to R$ und $\bar{L}=[0,+\infty)$ ist.

In der obengenannten Arbeit wurde aber eine Klasse von Lösungen nicht gefunden, die wir durch den Hilfssatz 4 ausdrücken werden. Gleichzeitig werden auch neue noch unbekannte Eigenschften der Stufenlösung (12) hervogehoben. Es wird noch folgende Funktionalgleichung

$$f(L+x)=f(L)+f(x),\ x>0 \tag{2}$$

angenommen, wobei $f:L\to R$ und $L=(0,+\infty)$ ist.

Diese beiden Gleichungen wurden in [2] verwendet, um die Lösungen einer verallgemeinerten Cauchy-Gleichung (Gleichung (1) aus [2]) zu finden. Die Gleichung (1) aus [2] ist zuerst in [1] aufgetreten. Die neuen Lösungen der Gleichung (1) aus [2] wird das Thema einer nächsten Arbeit sein.

1. BESCHRANKTE LÖSUNGEN DER FUNKTIONALGLEICHUNG (1).

Um die Funktionalgleichung (1) rascher lösen zu können, verweden wir Satz 2 aus [2], der wie folgt ausgedrükt wird :

Satz 1. Für die nach unten beschränkten Lösungen der Funktionalgleichung (2) treffen folgende und nur folgende drei Fälle zu :

(I) f ist ein beliebiger Homöomorphismus von L auf sich selbst,

(II) f ist eine Stufenfunktion von folgender Form :

Es existirt eine undendliche Zahlenfolge

$$\begin{cases} 0=x_0<x_1<\ldots<x_n<\ldots, \text{ so dass} \\ f(x)=nq \text{ für } x\in[x_n, x_{n+1}); \; n=0, 1, 2,\ldots \text{ und } q>0 \\ \quad (\text{für } n=0 \text{ haben wir } (0, x_1)), \end{cases} \tag{3}$$

(III) $f(L)=0$.

Zu bemerken ist, dass die Zahlenfolge im Falle II absolut beliebig ist.

Wir nehmen nun an, dass $f: \bar{L}\to R$ eine nach unter beschränkte (Der Fall, dass f nach oben beschränkt ist, wird auf f nach unten beschränkt zurückgeführt, sobald man f mit $-f$ einsetzt. Lösung der Funktioangleichung (1) ist.

Da $f(0+x)\in f(\bar{L})+f(x)$ ist, folgt aus der Gleichung (1)

$$(4)\quad 0\in f(\bar{L}).$$

Daher müssen wir folgende zwei Fälle unterscheiden: entweder $f(0)=0$ oder $f(0)\neq 0$. Sobald in (1) $x=0$ angenommen wird, tritt nur Fall $f(0)=0$ ein. Wird aber in (1) nur $x>0$ angenommen, so muss nicht inbedingt $f(0)=0$ sein, sondern es besteht die Möglichkeit dass $f(0)\neq 0$ ist.

Deshalb müssen folgende zwei Hilfsätze bewiesen werden:

Hilfssatz 1. Jede Lösung der Funktionalgleichung (2) genügt auch der Funktionalgleichung (1) sobald $f(0)=0$ ist.

Beweis. Wir haben im allgemeinen folgende Beziehungen:

$$f(\bar{L}+x)=f(L+x)\cup f(x) \text{ bzw.} \tag{5}$$

$$f(\bar{L})+f(x)=[f(f(L)+f(x)]\cup[f(0)+f(\,(x)]. \tag{6}$$

Da $f(0)=0$ ist, folgt aus (5) und (6) $f(L+x)\cup f(x)=f(\bar{L}+x)$ bzw. $[f(L)+$ $+f(x)]\cup f(x)=f(\bar{L})+f(x)$. Da aber f der Gleichung (2) genügt, ist f auch eine Lösung der Funktionalgleichung (1).

Hilfssatz 2. Jede Lösung der Funktionalgleichung (2) genügt auch der Funktionalgleichung (1) sobald $f(0)=kq$, $k>0$ ist (q ist im Satz 1. Fall (II) bestimmt worden).

Beweis. Es sei f eine Lösung von (2). Da hier $f(0)\neq 0$ angenemmen wird, so folgt aus (4) dass $0\in f(L)$ d. h. dass laut Satz 1 nur Fall (II) eintreffen kann. Also f eine Stufenfunktion (3). Sobald $f(0)=kq$, $k>0$ (ist $k=0$ so besteht Hilfssatz 1) so ist wie in [2] S. 274 gezeigt wurde, f eine Lösung von (1).

Ist aber $f(0)\neq kq$, $k\in N_0=N\cup\{0\}$, so genügt die Stufenfunktion (3) nicht der Funktionalgleichung (1).

Nehmen wir an, dass die Stufenfunktion (3) mit $f(0)\neq kq$, $k\in N_0$ der Funktionagleichung (1) genügt. Aus der Gleichung (1) folgt:

$$f(0)+f(x)\in f(\bar{L}+x)\subset f(L) \tag{7}$$

weil $\bar{L}+x\subset L$ für $x>0$.

Aus (7) entnehmen wir, dass es ein $\bar{x} \in L$ gibt, so dass

$$f(0)+f(x)=f(\bar{x}). \tag{8}$$

Da f eine Stufenfunktion ist, so hat man $f(x)=mq$ und $f(\bar{x})=nq$; $m, n \in N$. Offensichtlich ist $n>m$ da $f(0)\neq 0$ also $f(0)>0$ (weil f eine nach unter beschränkte Lösung ist und deshalb muss $f(x)\geqslant 0$, wie aus der Gleichung (1) leicht ersichtlich ist). Aus (8) ergibt sich schliesslich

$$f(0)=(n-m)\,q>0 \tag{9}$$

was im Widerspruch zur Hypothese ist. Daraus folgt, dass nur $f(0)=kq$, $k \in N_0$ sein kann.

Bemerkung 1. Die Kehrsätze der beiden Hilfssätze 1 und 2 sind im allgemeinen nicht wahr und deshalb besteht die Möglichkeit, dass die Funktionalgleichung (1) ausser den Lösungen von Satz 1 auch andere Lösungen besitzen kann.

Hilfssatz 1 und 2 gibt uns ein Mittel, um nachzuprüfen, ob die Gleichung (1) auch andere Lösungen als Gleichung (2) hat. Beim näheren überprüfen der logischen Unterschiede der Fälle (I)−(III) aus Satz 1 ergibt sich eine neue Klasse von Lösungen der Funktionalgleichung (1).

Da $0 \in f(\bar{L})$ unterscheiden wir logischerweise zwei Fälle:

– Falls es in $\bar{L}$ keinen Punkt x_0 gibt für den $f(x_0)\neq 0$ so ist

$$f(\bar{L})=0, \tag{10}$$

d. h. es tritt Fall (III) Satz 1 ein.

– Falls es aber in aber in $\bar{L}$ wenigstens einen Punkt x_0 gibt, für den $f(x_0)\neq 0$, so kann Fall (III) Satz 1 nicht einteffen.

Im weiteren setzen wir nur diesen Fall voraus. Wir müssen nun *zwei Unterfälle* in Betracht ziehen:

– entweder $0 \notin f(L)$

– oder $0 \in f(L)$.

Sobald $0 \notin f(L)$ kann nur $f(0)=0$ sein. Nun ergibt aber Hilfssatz 1 dass

(11) f ein Homöomorphismus von L auf selbst sein muss, falls $0 \notin f(L)$ (Satz 1 Fall (I)).

Nehmen wir nun an, dass *$0 \in f(L)$ und es wenigstens einen Punkt $x_0 \in L$ gibt, für den $f(x_0)\neq 0$ ist.* Falls nur $f(0)\neq 0$ und $f(L)=0$, so genügt f nicht der Funktionalgleichung (1), deshalb muss es wenigstens ein $x_0\neq 0$ geben, so dass $f(x_0)\neq 0$ ist. Daraus ergeben sich wieder *zwei Möglichkeiten*:

A. – entwedwr „0" ist ein isolierter Punkt von $f(L)$ oder

B. – „0" ist ein Häufungspunkt von $f(L)$.

Wir setzen A voraus. (Die obengenannten Bedingungen die nach (11) folgen bestehen weiter). *Falls zwischen 0 und $f(x_0)$ ein erstes von „Null" verschiedenes Element $f(x_1)=q>0$, $f(x_1) \in f(L)$ existiert,* so kann ähnlich wie bei [2] nachgeprüft werden, dass in diesem Falle nur eine Stufenfunktion (3) mit $f(0)=kq$, $k\geqslant 0$

der Gleichung (1) genügt, also als Lösung auftritt. Dies wird genauer durch Hilfssatz 3 angegeben.

Besonders hervorzuheben ist noch dass

$$M := \{x : f(x) = f(x_0),\ x \in \bar{L}\}$$

nicht undebingt rechts offen sein muss, wie dies bei der Gleichung (2) (siehe [2] S. 268) der Fall ist. Dies geht eindeutig klar aus ddr Funktionalgleichung (1) hervor. Daraus ergibt sich nun folgenden

Hilfssatz 3. Eine Stufenfunktion

$$f(M_n) = nq\,;\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\,;\quad q > 0,\ f(0) = sq,\ s \geqslant 0 \tag{12}$$

die auf beliebigen abzählbaren nichtleeren Teilmengen $M_n \in \bar{L}$ definiert ist, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{cases} \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n = \bar{L},\ 0 \in M_0 \text{ oder } 0 \notin M_0 \\ M_m \cap M_n = \emptyset,\ m \neq n\,;\quad m,\ n \in N_0 \\ x < y \text{ dann und nur dann wenn } x \in M_m,\ y \in M_n \text{ und } m < n, \end{cases} \tag{13}$$

ist ein nach unten beschränkte Lösung der Funktionalgleichung (1).

Nehmen wir nun an, dass *zwischen 0 und $f(x_0)$ kein von Null verschiedenes erstes Element aus $f(L)$ existiert* d.h. $f(L)$ hat eine unendliche Anzahl von Elementen zwischen 0 und $f(x_0)$ (im Gegenfall würde das obengenannte Element $f(\bar{x}_1) \in f(L)$ existieren). Es sei nun „a" der kleinste Häufungspunkt von $f(L)$ zwischen 0 und $f(x_0)$ (offensichtlich existiert „a" und $a \neq 0$) weil „0" ein isolierter Punkt ist. Zwischen 0 und a können keine Elemente aus $f(L)$ liegen, weil sonst würde wieder $f(\bar{x}_1)$ existieren. Gehört $a \in f(L)$, so wäre $a = f(\bar{x}_1)$, was wieder im Widerspruch zur Annahme ist. Daraus folgt $a \notin f(L)$. Nun sei weiter

$$\sup M_0 = x_1 \in M_0 := \{x : f(x) = 0,\ x \in \bar{L}\}\,. \tag{14}$$

Falls $x_1 \notin M_0$ so hätte $f(x_1)$ die obengenannte Eigenschaft von $f(x_1)$.

Somit erhalten wir:

$$f(x) = \begin{cases} 0\,;\ 0 < x \leqslant x_1 \\ > a\,;\ x > x_1 \end{cases} \tag{15}$$

Es sei x_1', $x_2' \in L$ zwei Punkte die genügend nahe zu x_1 liegen uzw. so dass $x_2' > x_1' > x_1$. Da f monoton steigend ist, muss $f(x_2') > f(x_1')$ sein. (Falls $f(x_1') = f(x_2')$ ist, für alle x_1' und x_2' mit der obengenannten Eigenschaft, so kann „a" nicht der obengenannten Bedingung genügen). Da $x_2' > x_1'$ folgt aus der Funktionalgleichung (1) dass

$$f(x_2') - f(x_1') \in f(L) \tag{16}$$

Weil aber „a" ein Häufungspunkt ist, kann man

$$f(x_2')-f(x_1')<a \tag{17}$$

annehmen.

(16) und (17) widersprechen (15). Folglich kann dieser Unterfall von A nicht auftreten.

Setzen wir nun B voraus. (Die obengenannten Bedingungen die nach (11) folgen bestehen natürlich weiter).

Wir können nun folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz 4. Jede nach unten beschränkte nichtbanale Lösung der Funktionaleichung (1) für die $0\in f(L)$ ein Häufungspunkt ist, ist eine beliebige auf L stetige und monoton steigende Funktion für die $f(L)=f(\bar{L})=\bar{L}$ bzw. $Q':=\{x: f(x)=f(x_0)\neq 0;\ x, x_0\in\bar{L}\}$. ist ein abgeschlossenes Intervall.

B e w e i s. Es sei f eine nichtbanale nach unten beschränkte Lösung von (1). $0\in f(L)$ ist laut Voraussetzung ein Häufungspunkt. Ähnlich wie die Aussagen (2.4) und (3.1) aus [2] kann bewiesen werden, dass f auf L monoton steigend und stetig ist und dass $f(L)=f(\bar{L})=\bar{L}$.

Nun zeigen wir, dass jede Funktion die diese Bedingungen erfüllt, eine nach unten beschränkte Lösung der Funktionalgleichung (1) ist. Wie leicht nachzuprüfen ist, genügt für $x=0$ jede obengenannte Funktion der Funktionalgleichung (1) für die unbedingt $f(0)=0$ ist. Es sei weiter $x>0$ und

$$f(x_0)\in f(\bar{L}+x) \tag{17}$$

ein beliebiges Element d.h. es existiert ein $x_1\geqslant x$, so dass $f(x_0)=f(x_1)$ bzw. da f monoton auf L ist, hat man $f(x_1)\geqslant f(x)$. Deshalb existiert ein $u\in\bar{L}$ für das $f(x_1)=u+f(x)$. Da aber $f(L)=\bar{L}$, folgt dass es ein $\bar{x}_1\in\bar{L}$ gibt, so dass $u=f(\bar{x}_1)$. Es ergibt sich $f(x_1)=f(\bar{x}_1)+f(x)$ und da $f(x_0)=f(x_1)$ folgt:

$$f(x_0)\in f(\bar{L})+f(x). \tag{18}$$

Aus (17) folgt (18) d.h.

$$f(\bar{L}+x)\subset f(\bar{L})+f(x) \tag{19}$$

Nun sei

$$f(x_0)\in f(\bar{L})+f(x) \tag{20}$$

ein beliebiges Element. Daraus folgt $f(x_0)\geqslant f(x)$.

Ist $x_0\neq 0$ so folgt $x_0\geqslant x$ weil f auf L monoton ist. Daraus ergibt sich $x_0=x_0'+x$, $x_0'\in L$ und folglich

$$f(x_0)=f(x_0'+x)\in f(\bar{L}+x) \tag{21}$$

Hingegen ist $x_0=0$ so folgt die Existenz eines Elementes $x_1 \in L$ für das $f(x_1)=f(0)$, da $f(L)=\overline{L}$ und $f(0) \in f(\overline{L})=\overline{L}$. Da f auf L monoton ist, so muss $x_1 \geqslant x$. Nun folgt ähnlich wie oben

$$f(0)=f(x_1) \in f(\overline{L}+x). \tag{21'}$$

Aus (20), (21) und (21') folgt

$$f(\overline{L})+f(x) \subset f(\overline{L}+x) \tag{22}$$

(19) und (22) zusammen zeigen, dass f eine nach unten beschränkte Lösung der Funktionaleichung (1) ist.

Somit ist folgender Hauptsatz bewiesen:

Satz 2. Für die nach unter beschränkten Lösungen der Funktionagleichung (1) treffen folgende und nur folgende drei Fälle zu:

(I) $-$a.) f ist ein beliebiger strikt monoton steigender Homöomorphismus von $\overline{L}$ auf sich selbst, falls $f(0)=0$ und $0 \notin f(L)$.

$-$b.) f ist eine beliebige auf L stetige und monoton steigende Funktion für die $f(L)=f(\overline{L})=\overline{L}$, falls $0 \in f(L)$ ein Häufungspunkt von $f(L)$ ist, mit der Bedinguns dass $\{x : f(x)=0;\ x \in L\}$ bzw. $Q' := \{x : f(x)=f(x_0) \neq 0;\ x, x_0 \in L\}$ ein abgeschlossenes Intervall ist.

(II) f ist eine Stufenfunktion (12) die mit Hilfe der Bedingungen (13) definiert wird, falls es ein erstes von Null verschiedenes Element $f(x_0)=q \in f(L)$ gibt.

(III) $f(\overline{L})=0$, falls es kein Punkt x_0 von $\overline{L}$ gibt für den $f(x) \neq 0$ ist.

Bemerkung 2. Jetzt kann man nun umgekehrt nachprüfen, welche Lösungen der Funktionalgleichung (1) auch Lösung für die Gleichung (2) ist. Im Satz 1 fehlen nur die Lösungen aus (I) b.). Diese können aber bei der Funktionalgleichung (2) nicht auftreten, weil dort sup $Q \notin Q$, da alle Q (siehe [2] S. 268) rechts offen sein müssen. Somit erschöpft Satz 1 alle möglichen nach unten beschränkten Lösungen.

2. MONOTONE UND STETIGE LOSUNGEN DER FUNKTIONALGLEICHUNG (1).

Ähnlich wie in [2] S. 274 kann man nachprüfen, dass Satz 2 alle monotonen Lösungen der Funktionagleichung erschöpft, bzw. Fall (I) a.) und b.) ergibt alle stetigen nichtbanalen Lösungen der Funktionalgleichung (1), falls $f(\overline{L}) \neq (-\infty, +\infty)$ ist. (Letztere Einschränkung bezieht sich nur auf die stetigen Lösungen.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Alexandrov, A. D. „A contribution to chronogeometry" Canad. J. Math. 19 (1967), 1 119—1 128.

[2] Alexandrov, A. D. „A certain generalization of the functional, equation $f(x+y)=f(x)+f(y)$" (Russian) Sibirsk. Mat. J. 11 1970, (264—274) oder aus: Siberian Math. J. 11 (1970), 198—209 (Englishtranslation).

O NOUĂ CLASĂ DE SOLUȚII A UNEI ECUAȚII FUNCȚIONALE

(REZUMAT)

În această lucrare se arată că ecuația funcțională (1) are și în afară soluțiilor mărginite sau monotone sau continue cunoscute prin lucrarea [2] și o altă clasă de astfel de soluții. Această clasă de soluții este exprimată prin lema 4. La fel se mai evidențiază noi proprietăți ale soluțiilor etajate (3) sau (12)+(13) nepuse în evidență în lucrarea [2]. Teorema 2 exprimă toate soluțiile mărginite sau monotone posibile ale ecuației funcționale (1), respectiv toate soluțiile continue (cazul (I) a și b și cazul (III)) dacă $f(\overline{L}) \neq (-\infty, +\infty)$. ale aceleiași ecuații funcționale.

НОВЫЙ КЛАСС РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(РЕЗЮМЕ)

В данной работе показано, что функциональное уравнение (1) имеет кроме ограниченных или монотоных беспрерывных решений, известные в работе [2] и другой класс таких решений. Этот класс решений выражен ламмой 4. Так же выделяются новые свойства степеных решений (3) или (12) + (13) не выделяемые в работе [2]. Теорема 2 выражает все ограниченные решения или возможно монотонные функционального уравнения (1), соответственно все непрерывные решения (случай (I) а и случай (III) если $f(\overline{L}) \neq (-\infty + \infty)$ того же функционального уравнения.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T. Seria Matematică-Fizică-Mecanică teoretică şi aplicată. Tomul 16(30), Fasc. 2/1971.

PERTURBED QUANTUM TRANSITIONS

BY

M. BORNEAS

The purpose of the present paper is to examine in a unitary way the case when a number of successive fields act on a quantum system, determining transitions and changing the energy spectrum.

The Hamiltonian of the system is at the beginning H_0 (not depending explicitly on the time), so that the equation

$$i\hbar\,\partial\psi_0/\partial t = H_0\psi_0 \tag{1}$$

can be solved, and we presume the energy spectrum is discrete and nondegenerate.

At the successive instants $t_1, t_2, \ldots t_N$ time dependent fields are turned on, the interaction Hamiltonians being $V_1(t)$, $V_2(t), \ldots, V_N(t)$. The fields may or may not turn out after some time. Thus in general, after all fields began to work, the Schrödinger equation is

$$i\hbar\,\partial\Psi/\partial t = \left[H_0 + \sum_{\alpha=1}^{N} V_\alpha(t)\right]\Psi. \tag{2}$$

In order to write the general solution of Eq. (2) consider first the following case.

A system is described up to the time t_0 by the Hamiltonian H_t, then from this time on, the interaction $V(t)$ is turned on. The Schrödinger equation is

$$i\hbar\,\partial\psi/\partial t = H\psi \equiv (H_t + V)\,\psi. \tag{3}$$

We shall solve the problem in a slightly unusual way. Looking for a solution of the form

$$\psi_k(x, t) = \Phi_k(x, t)\,\Theta_k(t) \tag{4}$$

(we noted with x the totality of the dynamical variables which the functions depend on), and substituting in (3) we have

$$i\hbar\,(\partial\Phi_k/\partial t)\,\Theta_k + i\hbar\Phi_k\partial\Theta_k/\partial t = H\Phi_k\Theta_k. \tag{5}$$

Dividing by ψ_k we obtain

$$(i\hbar/\Theta_k)\partial\Theta_k/\partial t = H\Phi_k/\Phi_k - (i\hbar/\Theta_k)\,\partial\Phi_k/\partial t. \tag{6}$$

The left side of (6) depends on the time only, thus we can write

$$(i\hbar/\Theta_k)\, d\Theta_k/dt = F_k(t) \tag{7}$$

and hence

$$\Theta_k = \exp(-i/\hbar) \int F_k\, dt. \tag{8}$$

The function Φ_k must satisfy the equation

$$H\Phi_k \equiv (H_l + V)\,\Phi_k = i\hbar\, \partial\Phi_k/\partial t + F_k\Phi_k. \tag{9}$$

Thus the solution of Eq. (3) is

$$\psi_k = \Phi_k \exp(-i/\hbar) \int F_k\, dt \tag{10}$$

where the functions Φ_k are supposed orthonormal.

The general state of the system is descried by

$$\psi = \sum_k a_k \Phi_k \exp(-i/\hbar) \int F_k\, dt. \tag{11}$$

Substitution into (3) gives

$$\sum_k i\hbar\,(\partial a_k/\partial t)\,\Phi_k \exp(-i/\hbar)\int F_k\,dt + \sum_k i\hbar\, a_k\,(\partial\Phi/\partial t)\exp(-i/\hbar)\int F_k\,dt +$$

$$+ \sum_k a_k F_k \Phi_k \exp(-i/\hbar)\int F_k\,dt = \sum_k a_k H\Phi_k \exp(-i/\hbar)\int F_k\,dt. \tag{12}$$

Multiplying by $\Phi_n^* \exp(i/\hbar)\int F_n\,dt$ and integrating

$$da_n/dt = \sum a_k \left[\exp(i/\hbar)\int (F_n - F_k)\,dt\right]\left[-\langle\Phi_n|\,\partial\Phi_k/\partial t\rangle - \right.$$

$$\left. -(i/\hbar)\langle\Phi_n|H|\Phi_k\rangle + (i/\hbar)\langle\Phi_n|F_k|\Phi_k\rangle\right]. \tag{13}$$

If at the time t the interaction operator V becomes constant, or slowly varying, or sufficiently small, we can consider the function $F(t)$ as the energy $E(t)$. Then integrating (13) we obtain

$$a_n = \int dt \sum_k a_k \left\{\exp(i/\hbar)\int (E_n - E_k)\,dt\,[-\langle\Phi_n|\,\partial\Phi_k/\partial t\rangle - (i/\hbar)\langle\Phi_n|H|\Phi_k\rangle + \right.$$

$$\left. + (i/\hbar)\langle\Phi_n|E_k|\Phi_k\rangle]\right\} + const. = \int dt \sum_k a_k\, W^{nk}(H) + const. \tag{14}$$

where the expression from the large parenthesis has been shortly noted $W^{nk}(H)$. The form of this expression may be different, depending on the type of the Hamiltonian.

If we suppose an adiabatic proces, the instantaneous eigenvalue equation may be written [1]

$$E_k\Phi_k = H\Phi_k \equiv (H_l + V)\,\Phi_k. \tag{15}$$

This leads to the reduction of the last two integral in W^{nk}. By differentiation of Eq. (15) we obtain

$$(\partial E_k/\partial t)\Phi_k+E_k\partial\Phi/\partial t=(\partial H/\partial t)\Phi_k+H\Phi/\partial t$$

and, multiplying by Φ_n^*, integrating, and taking into account the hermiticity of H, we can write

$$<\Phi_n|\partial\Phi_k/\partial t>=(1/E_n-E_k)\ (-<\Phi_n|\partial H/\partial t|\Phi_k>+\dot{E}_k\delta_{nk}) \tag{16}$$

which allows the substitution of the first integral from W^{nk}.

If the operator $V(t)$ is small enough, so that it can be neglected in (9), this relation permits the reduction of W^{nk} to

$$W^{nk}(V)=(-i/\hbar)<\Phi_n|V|\Phi_k>\exp\ (i/\hbar)\int(E_n-E_k)\,dt. \tag{17}$$

Presuming that H_t does not depend explicitly on the time and it has the eigenfunctions φ_k, we put

$$E_k(t)=E_{0k}+\Delta E_k(t) \tag{18}$$

$$\Phi_k(t)=\varphi_k+\Delta\Phi_k(t) \tag{19}$$

and neglecting the products of V by $\Delta\Phi_k$ we obtain

$$W^{nk}(V)=(-i/\hbar)<n|V|k>\exp\ (i/\hbar)\left[(E_{0n}-E_{0k})\,t+\int(\Delta E_n-\Delta E_k)\,dt\right] \tag{20}$$

which with $k\neq n$ is a well-known relation [2].

Taking into account the small value of V we can write

$$\Delta E_k=E_k^{(1)}+E_k^{(2)}+\ldots \tag{21}$$

$$\Delta\Phi_k=\Phi_k^{(1)}+\Phi_k^{(2)}+\ldots \tag{22}$$

where the upper index (1) shows the order of magnitude of the perturbation V, the quantities with index (2) are small magnitudes of the second order, and so on. In first order approximation we have

$$\Delta E_k=E_k^{(1)} \tag{23}$$

$$\Delta\Phi_k=\Phi_k^{(1)} \tag{24}$$

and the previous equations may be written in a corresponding way. Calculation of $E_k^{(1)}$ and $\Phi_k^{(1)}$ can be made by the methods of Chung [3] or Heinrichs [4]

Let us now return to out initial problem. The general solution of. Eq. (2), according to (11) and with the V-s small, is

$$\Psi=\sum_k c_{N,k}\,\Phi_{0k}\exp\ (-i/\hbar)\int E_k\,dt. \tag{25}$$

The coefficients will be given, as in (14), by

$$c_{N,n}=\int dt \sum_g c_{N,g} W^{ng} \left(\sum_{a=1}^{N} V_a\right)+const. \tag{26}$$

where in the expression of W we substitute V by $\sum_{a=1}^{N} V_a$, and also Φ_k by Φ_{0k}, and φ_k by φ_{0k}.

Now we shall solve the new problem, that is to express $c_{N,n}$ considering the intermediate possible states at successive instants $t_1,\ldots t_2$. We proceed as follows. To find the integration constant we use the fact that for $t=t_N$ the interaction V_N becomes zero, and the coefficients become $c_{N-1,n}(t_N)$. Hence it results

$$\text{const.}=c_{N-1,n}(t)-\left|\int dt \sum_g c_{N,g} W^{ng} \left(\sum_{a=1}^{N} V_a\right)\right|_{t=t_N}. \tag{27}$$

Considering the smallness of V_N we can put now the coefifcients $c_{N,k}$ in the form

$$c_{N,k}=c^{(0)}_{N,k}+c^{(1)}_{N,k}+c^{(2)}_{N,k}+\ldots \tag{28}$$

and make the substitution

$$c^{(0)}_{N,k}=c_{N-1,k}(t_N). \tag{29}$$

Then from (26) we can write

$$c^{(0)}_{N,n}+c^{(1)}_{N,n}+c^{(2)}_{N,n}+\ldots=\int_{t_N}^{t} dt \sum_g [c_{N-1,g}(t_N)+$$

$$+c^{(1)}_{N,g}+c^{(2)}_{N,g}+\ldots] W^{ng} \left(\sum_{a=1}^{N} V_a\right)+c_{N-1,n}(t_N) \tag{30}$$

wherefrom, by equating the terms of the same order of magnitude, we obtain

$$c^{(1)}_{N,n}=\int_{t_N}^{t} dt \sum_g c_{N-1,g}(t_N) W^{ng} \left(\sum_{a=1}^{N} V_a\right), \tag{31}$$

$$c^{(2)}_{N,n}=\int_{t_N}^{t} dt \sum_g c^{(1)}_{N,g} W^{ng} \left(\sum_{a=1}^{N} V_a\right) \tag{32}$$

etc. Coefficients $c_{N-1,g}(t)$ can be calculated in the same way from (14), and putting

$$c_{N-1,k}=c^{(0)}_{N-1,k}+c^{(1)}_{N-1,k}+c^{(2)}_{N-1,k}+\ldots \tag{33}$$

with

$$c^{(0)}_{N-1,k}=c_{N-2\,k}(t_{N-1}). \tag{34}$$

Thus for the first approximation, from (31) we further have

$$c^{(1)}_{N,n}=\int_{t_N}^{t} dt \sum_g \Big| c_{N-2,g}(t_{N-1})+\int_{t_{N-1}}^{t} dt \sum_h c_{N-2,h}(t_{N-1}) \times W^{gh}\Big(\sum_{a=1}^{N-1} V_a\Big)\Big|_{t_N} W^{ng}\Big(\sum_{a=1}^{N} V_a\Big). \tag{35}$$

Calculating $c_{N-2,h}(t_{N-1})$ we obtain

$$c^{(1)}_{N,n}=\int_{t_N}^{t} dt \sum_g \Big|\Big[c_{N-3,g}(t_{N-2})+\int_{t_{N-2}}^{t} dt \sum_j c_{N-3,j}(t_{N-2})\, W^{gj}\Big(\sum_{a=1}^{N-1} V_a\Big)\Big]_{t_{N-2}}+ +\int_{t_{N-1}}^{t} dt \sum_h \Big[c_{N-3,h}(t_{N-2})+\int_{t_{N-2}}^{t} dt \sum_j c_{N-3,j}(t_{N-2})\, W^{hj}\Big(\sum_{a=1}^{N-2} V_a\Big)\Big]_{t_{N-1}} \times \times W^{gh}\Big(\sum_{a=1}^{N-1} V_a\Big)\Big|_{t_N} W^{ng}\Big(\sum_{a=1}^{N} V_a\Big). \tag{36}$$

Proceeding further on in the same manner we observe that at last the coefficients $c^{(1)}_{N,n}$ are obtained, exprssed by the coefficients c_{0k}

$$c^{(1)}_{N,n}=\int_{t_N}^{t} dt \sum_g \Big| \ldots \Big| c_{0g}+\int_{t_N}^{t} dt \sum_l c_{0e}\, W^{gl}(V_1)\Big|_{t_2}+\ldots \ldots+\int_{t_1}^{t} dt \sum_l c_{0l}\, W^{kl}\Big(\sum_{a=1}^{N-2} V_a\Big)\Big|_{t_{N-1}} W^{gh}\Big(\sum_{a=1}^{N-1} V_a\Big)\Big|_{t_N} W^{ng}\Big(\sum_{\substack{a=1\\ N}} V_a\Big). \tag{37}$$

If we presume that the initial state was a state with energy E_{0m} $(n\neq m)$, then with

$$c_{0l}=\delta_{lm} \tag{38}$$

expression (37) becomes

$$c^{(1)}_{N,n}=\int_{t_N}^{t} dt \sum_g \Big| \ldots \Big|\int_{t_1}^{t} dt\, W^{gm}(V_1)\Big|_{t_2}+\ldots \int_{t_1}^{t} dt\, W^{km}\Big(\sum_{a=1}^{N-2} V_a\Big)_{t_{N-1}} \times \times W^{gh}\Big(\sum_{a=1}^{N-1} V_a\Big)\Big|_{t_N} W^{ng}\Big(\sum_{a=1}^{N} V_a\Big) \tag{39}$$

and

$$w_{mn}=|c_{N,n}|^2 \tag{40}$$

gives the transition probability from the state with energy E_{0m} to the state with energy E_n.

Considering that intermediare transitions do not take place we must find a known result. In fact, in this case all sums in (39) reduce to a single term

with index m, and the integrals except the first become equal to 1, so that (39) reduces to

$$c^{(1)}_{N,n} = \int_{t_N}^{t} dt W^{nm} \left(\sum_{\alpha=1}^{N} V_\alpha\right). \tag{41}$$

This is the valid expression for the case when at time t_N the system was certainly in the state m. Becaues for $t<t_N$ the integral (41) is zero, t_1 can be put as the lower limit of integration and the well-known form is obtained, for the case when a perturbation equal to the sum from the parenthesis would have turned on at the time t_1.

The intermediate expressions of form (36) give the possiblity to find the coefficients $c_{N,n}$ in case the perturbations are not known before a certain time, but the coefficients may be known at this time by macroscopic measurement.

REFERENCES

1. Schiff, L. *Quantum Mechanics*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1968 (3-rd edition).
2. Dawydow, A. *Quantenmechanik*, VEB Deutscher Verlag der Vissenschaften, Berlin, 1970 (2-dn edition),
3. Chung, K. Phys. Rev., *163*, 1 343 (1967).
4. Heinrichs, J. Phys. Rev., *172*, 1 325 (1968).

TRANZIŢII CUANTICE PERTURBATE

(REZUMAT)

Se studiază probabilităţile de tranziţie între strările staţionare, cînd asupra unui sistem cuantic acţionează cîmpuri sucesive. Se consideră cazul spectrului de energie discret şi nedegenerat.

Se caută forma soluţiei ecuaţiei lui Schrödinger după ce au acţionat toate perturbaţiile, apoi se calculează coeficienţii dezvoltării funcţiei de stare după stările aproape staţionare posibile.

Se stabilesc relaţiile între coeficienţii ce determină starea finală şi cei ce determină stările intermediare.

КВАНТОВЫЕ ПЕРТУРБИРУЕМЫЕ ПЕРЕНОСЫ

(РЕЗЮМЕ)

Рассматриваются вероятности переноса между станционарными состояниями, когда на квантовую систему воздействуют последовательные поля. Принимается случай дискретного невырожденного спектра энергии. Отыскивается форма уравнения Шредингера после воздействия всех возмущений, затем расчитываются коэффициенты разложения функции состояния по почти стационарным возможным состояниям.

Устанавливаются соотношения между коэффициентами определяющими конечное и промежуточные состояния.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată. Tomul 16(30),
Fasc. 2/1971.

CONSIDERAŢII CU PRIVIRE LA ANIZOTROPIA ÎN RAPORT CU CÎMPUL MAGNERIC A PĂTURILOR ELECTROLITICE SUBŢIRI DE Ni-Fe.

DE

COLETA DE SABATA

A. Cercetări comparative efectuate prin metoda histerezei de rotaţie asupra unor pături subţiri electrolitice de Ni, Fe şi aliaj Ni-Fe au scos în evidenţă o deosebire esenţială de comporate a metalelor pure faţă de comportarea aliajului, în raport cu cîmpul magnetic aplicat. [1].

Proba, în formă de disc, este rotită cu turaţie constantă într-un cîmp magnetic omogen, avînd liniile de forţă paralele cu suprafaţa probei. (Fig. 1).

Vectorii $\vec{J}_s$ ce caracterizează din punct de vedere magnetic domeniile Weiss, sînt antrenaţi de rotaţia discului dar pentru un unghi 2φ legătura complecşilor de spini cu reţeaua cristalină devine nefavorabilă din punct de vedere energetic şi atunci se produce saltul lor spre un minim de energie mai pronunţat, într-o direcţie apropiată de direcţia cîmpului magnetic $\vec{H}$.

Modificarea de poziţie a direcţiei medii de salt m poate fi urmărită experimental direct [1] [5].

Măsurătorile efectuate au arătat că:

1. În cazul metalului pur (Ni sau Fe) direcţia medie de salt m prezintă o variaţie monotonă cu creşterea intensităţii cîmpului magnetic $\vec{H}$ şi la saturaţia magnetică a probei ea tinde să se suprapună peste direcţia cîmpului $\vec{H}$ (Fig. 2).

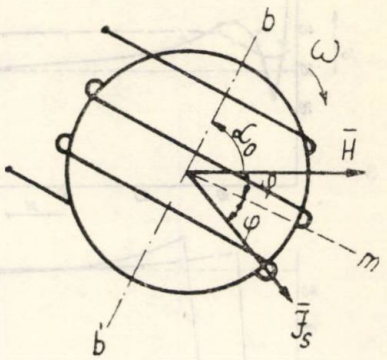


Fig. 1. Probă feromagnetică rotită într-un cîmp magnetic omogen.

2. Păturile subţiri electrolitice de Ni-Fe obţinute prin depunerea simultană a componentelor pe suporturi metalice nemagnetice [1], se comportă diferit iar dependenţa $\varphi = f(H)$ este influenţată de compoziţia aliajului.

Considerînd compoziţia permalloyului drept o stare particulară din punct de vedere a proprietăţilor magnetice (constanta de anizotropie şi magnetostricţiu-

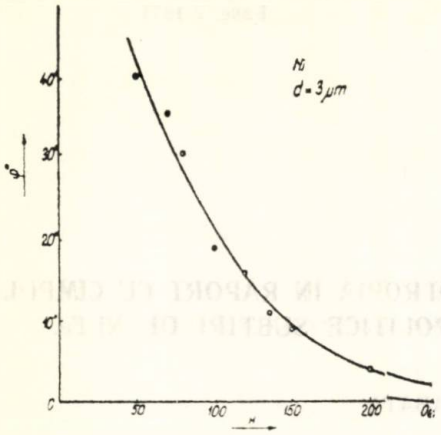


Fig. 2. Variația direcției medii de salt a vectorului $\vec{J}_s$ în raport cu cîmpul magnetic aplicat.

nea fiind practic nule [2]) păturile de aliaj Ni-Fe se pot împărți în două categorii :

a. pături de Ni-Fe sărace în fier (mai puțin de 20% Fe restul nichel)

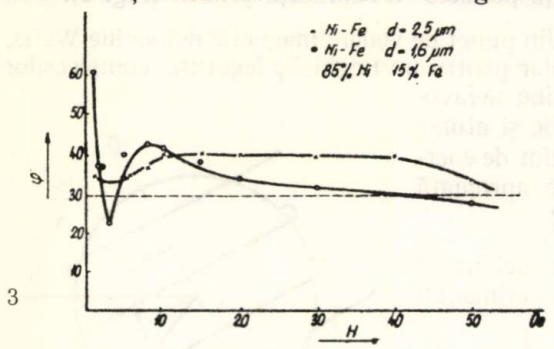
b. pături de Ni-Fe bogate în fier (mai mult de 20% Fe, restul nichel).

În fig. 3 și 4 sînt redate curbele $\varphi = F(H)$ pentru pături sărace în fier iar în fig. 5 aceeași dependență pentru o pătură bogată în fier.

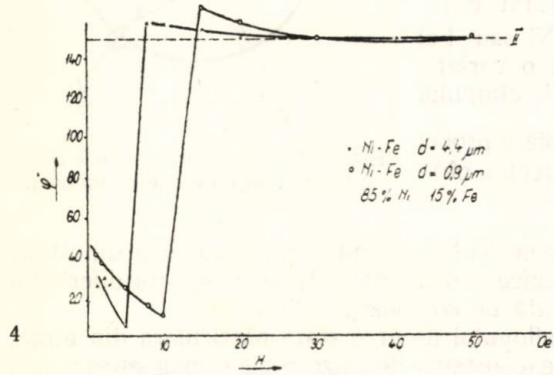
Analiza acestor curbe arată că :

– în cazul aliajelor Ni-Fe sărace în fier direcția medie de salt a vectorilor $\vec{J}_s$ la saturația magnetică a probei, se situează fie la un unghi de 30° (fig. 3) fie la un unghi de 150° (fig. 4) în raport cu direcția intensității cîmpului magnetic $\vec{H}$,

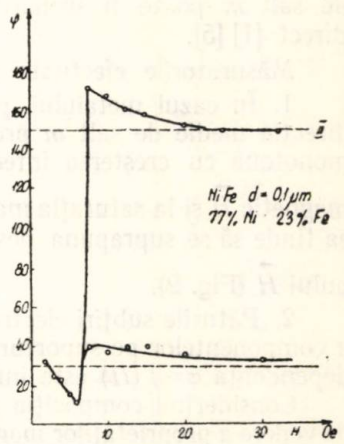
– în cazul aliajelor Ni-Fe bogate în fier, la saturația magnetică a probei există două direcții medii de salt situate la unghiuri de 30° și 150° (fig. 5); intensitatea



3



4



5

Fig. 3, 4, 5. Variația direcției medii de salt în funcție de cîmpul magnetic aplicat, pentru pături Ni—Fe sărace în fier (3 și 4) și bogate în fier (5).

efectului Barkhausen relativ la rotaţii, măsurat pentru cele două unghiuri, este aceeaşi (fig. 6).

În fig. 7 este prezentată curba de histerezis pentru una din probele Ni-Fe studiate, cu observaţia că toate celelalte au o alură similară. Se remarcă faptul că intensitatea cîmpului $\vec{H}$ pentru care apar cele două direcţii I şi II este cuprinsă

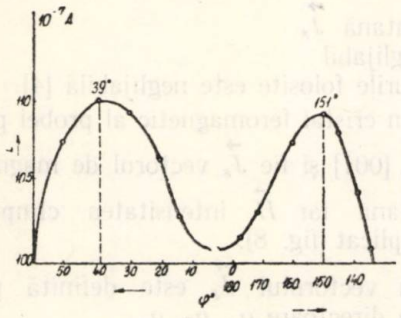


Fig. 6. Intensitatea efectului Barkhausen ca funcţie de direcţie medie de salt.

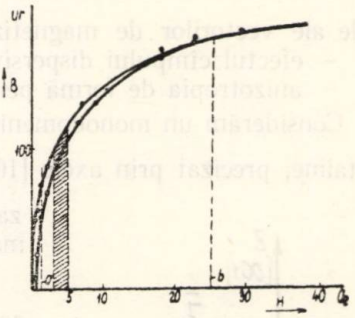


Fig. 7. Curbă de histereză pentru aliajele Ni—Fe.

în cotul superior al curbei de primă magnetizare corespunzătoare, regiune în care modificarea stării magnetice se face, în principal, prin procese de rotaţie.

B. Aliajele electrolitice Ni-Fe studiate se caracterizează prin:

- grosimea păturii este cuprinsă între 0,1 şi 5 μm
- compoziţia aliaju'ui:

  pături sărace în fier 85% − 80% Ni
  15% − 20% Fe

  pături bogate în fier 68% − 80% Ni
  32% − 20% Fe
- cîmpul coercitiv $H_c = (0{,}9 - 1{,}16)$ Oe
- probele în formă de disc au dimensiunile $Ø = 11$ mm, $h = 0{,}8$ mm şi au fost rotite în timpul depunerii electrolitice.

Din datele din literatură sistematizate de E. Kneller [2] şi S.V. Vonsovschi [3] rezultă că pentru aceste aliaje constanta de magnetostricţiune λ prezintă o variaţie aproape lineară pentru aliajele cu (70 − 90)% nichel restul fier, trecînd prin zero la compoziţia permalloyului. Valorile ei la limitele domeniului considerat sînt:

- pentru 70% Ni 30% Fe $\lambda = 20 \cdot 10^{-6}$
- pentru 90% Ni 10% Fe $\lambda = -20 \cdot 10^{-6}$.

Constanta de anizotropie cristalină K_1 este negativă avînd ca ordin de mărime valoarea $-3{,}5 \cdot 10^3$ erg/cm³.

Pentru a putea interpreta rezultatele experimentale obținute, studiem variația energiei libere a unui domeniu elementar de magnetizare spontană ce se rotește uniform în cîmpul magnetizant $\vec{H}$.

Admitem că:

– modificarea stării magnetice se face prin procese de rotație *)
– efectul de histereză de rotație măsurat se datorește rotațiilor ireversibile ale vectorilor de magnetizare spontană $\vec{J}_s$
– efectul cîmpului dispersiv este neglijabil
– anizotropia de formă pentru discurile folosite este neglijabilă [4].

Considerăm un monodomeniu dintr-un cristal feromagnetic al probei policristaline, precizat prin axele [100], [010], [001] și fie $\vec{J}_s$ vectorul de magnetizare spontană iar $\vec{H}$ intensitatea cîmpului magnetic aplicat (fig. 8).

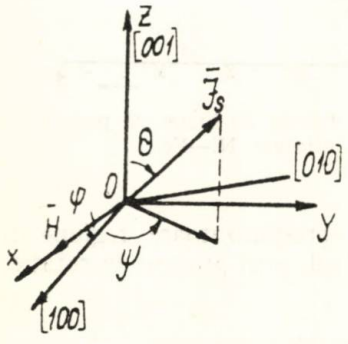


Fig. 8. Poziția cristalului în raport cu sistemul de coordonate ales.

Poziția vectorului $\vec{J}_s$ este definită prin cosinusurile directoare α_1, α_2, α_3, care, exprimate în coordonate polare, devin:

$$\alpha_1 = \sin\theta \cdot \cos(\psi - \varphi)$$
$$\alpha_2 = \sin\theta \cdot \sin(\psi - \varphi)$$
$$\alpha_3 = \cos\theta$$

Componenta energiei libere datorită anizotropiei cristaline, calculată cu aproximația puterii a patra pentru termenii în care intră cosinusurile directoare [5], pentru unitatea de volum a feromagneticului, va fi:

$$F_k = K(\alpha_1^2 \cdot \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \cdot \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \cdot \alpha_1^2)$$

sau, în coordonate polare și cu observația că pentru aliajele studiate $K < 0$, va fi:

$$F_k = -K\left[\sin^2\theta - \frac{7}{8}\sin^4\theta - \frac{1}{8}\sin^4\theta \cdot \cos 4(\psi - \varphi)\right].$$

Expresia energiei potențiale datorită prezenței cîmpului magnetic exterior va fi:

$$F_m = -(\vec{H} \cdot \vec{J}_s) = -H \cdot J_s \cdot \sin\theta \cos\psi.$$

Componenta energiei libere datorită tensiunilor magnetoelastice depinde de:

– valoarea și semnul magnetostricțiunii λ
– valoarea și semnul solicitării din material

*) In [6] și [7] s-a arătat că maximul de pierderi prin deplasări de pereți se situează la intensități de cîmp $\vec{H}$ mult inferioare celui în care efectul Barkhausen este decelabil.

– unghiul dintre direcția solicitării și direcția privilegiată de magnetizare a materialului, θ.

Simetria radială a probei și faptul că pentru compoziția de 80% Ni 20% Fe, tensiunile ce apar în pătură în urma depunerii electrolitice sînt practic nule, a impus un studiu experimental care să permită tragerea unor concluzii cu privire la calculul acestei componente din energia liberă a sistemului.

Probele au fost supuse unor tratamente termice succesive la temperaturi pînă la 300 °C cu răcire lentă în cuptorul deconectat de fiecare dată ridicîndu-se experimental dependența $\varphi = F(H)$.

Cercetările arată că :

a. la probe sărace în fier, înainte de aplicarea unui tratament termic, direcția medie de salt la saturație, precizată prin unghiul φ, se situează fie la 30° fie la 150° în raport cu intensitatea cîmpului $\vec{H}$ (fig. 3 și 4).

b. tratamentul termic separă cele două direcții pentru aceeași probă ; în cîmpuri mai puțin intense predomină direcția ce duce unghiul φ spre 150° iar în cîmpuri intense direcția ce duce unghiul φ spre 30° (fig. 9 și 10)

c. la probele bogate în fier cele două direcții pot fi urmărite în paralel tot timpul (fig. 5) iar tratamentul termic nu la modifică.

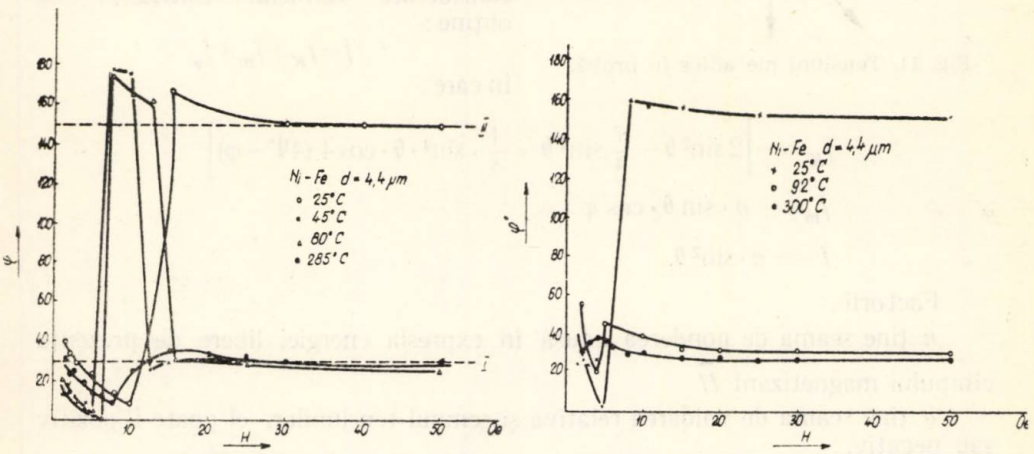


Fig. 9, 10. Modificarea direcției medii de salt în urma tratamentelor termice.

Literatura [2] arată că o creștere a procentajului de fier în aliaj aduce constanta de magnetostricțiune în domeniul $\lambda > 0$. Cum comportarea lor după tratamentul termic este similară cu a păturilor Ni-Fe bogate în fier dar netratate termic, rezultă că tensiunile ce apar fac produsul $\lambda \cdot \sigma > 0$ pentru păturile sărace în fier.

Pentru discurile folosite, cu bună simetrie radială, admitem că tensiunile ce apar sînt de două categorii (fig. 11) :

– tensiunile radiale σ_r, aceleași după orice azimut în planul discului
– tensiuni axiale σ_a.

Componenta corespunzătoare a energiei libere va fi:

$$F_\sigma = \frac{3}{2} \cdot \lambda \cdot \sigma_a \cdot \sin^2 \theta + \frac{3}{2} \cdot \lambda \cdot \sigma_r \cdot \cos^2 \theta$$

sau

$$F_\sigma = \frac{3}{2} \cdot \lambda \cdot \sigma_r \cdot \left[1 + \frac{\sigma_a - \sigma_r}{\sigma_r} \cdot \sin^2 \theta \right].$$

Energia liberă, cu aproximația unei constante aditive, se poate scrie:

$$F = F_k + F_m + F_\sigma.$$

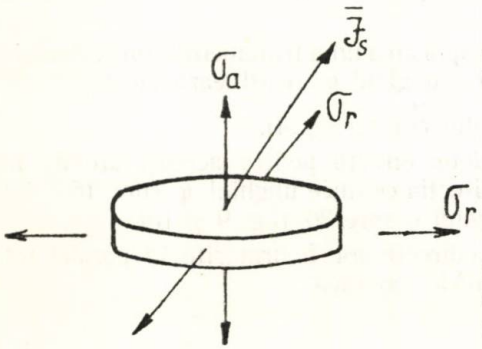


Fig. 11. Tensiuni mecanice în probă.

Facem o schimbare de funcție și notăm:

$$f = \frac{2}{K} F \qquad n = \frac{2 \cdot H \cdot J_s}{K}$$

$$a = \frac{3\lambda}{K} (\sigma_a - \sigma_r).$$

Întrucît ne interesează numai variația energiei libere, nu vor fi luați în considerare termenii constanți. Se obține:

$$f = f_K + f_m + f_\sigma$$

în care:

$$f_K = -\left[2 \sin^2 \theta - \frac{7}{4} \sin^4 \theta - \frac{1}{8} \cdot \sin^4 \cdot \theta \cdot \cos 4 \, (4\Psi - \varphi) \right]$$

$$f_m = -n \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi$$

$$f = -a \cdot \sin^2 \theta.$$

Factorii:

n ține seama de ponderea adusă în expresia energiei libere de prezența cîmpului magnetizant $\vec{H}$

a ține seama de valoarea relativă și semnul tensiunilor, el poate fi pozitiv sau negativ.

Calculînd variația energiei libere la o rotație completă a cirstalului în cîmpul $\vec{H}$ se obțin curbe de tipul celor din fig. 12, 13 și 14.

Analiza lor arată că:

1. În cîmpuri magnetice puțin intense, sub 2 Oe, magnetizarea este reversibilă (aici efectul Barkhausen nu este decelabil). Minimul energiei libere — marcat prin cerculețe pe fig. 12 — este mereu îngrădit între două maxime vecine. Vectorul $\vec{J}_s$ este antrenat de rotația cristalului și efectuează doar o oscilație în jurul diagonalei [111] — marcată prin săgeți — care este axa de cea mai ușoară magnetizare.

2. Creșterea intensității cîmpului magnetizant $\vec{H}$ (3 și 5 Oe) face ca pentru o anumită poziție a cristalului un minim de energie să se transforme într-un punct de inflexiune al curbei. Aceasta favorizează saltul ireversibil al vectorului $\vec{J}_s$ spre un minim mai profund al energiei. *Direcția medie de salt este de cca. 30° în acord cu rezultatele experimentale.*

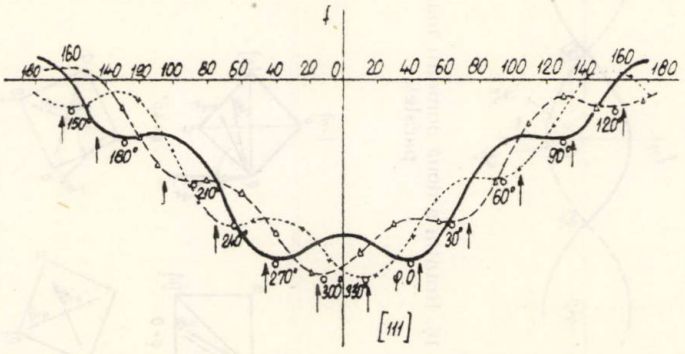


Fig. 12. Variația energiei libere la o rotație completă a cristalului : $f=f_m+f_K$; $H=1$ Oe ; $n=0{,}6$.

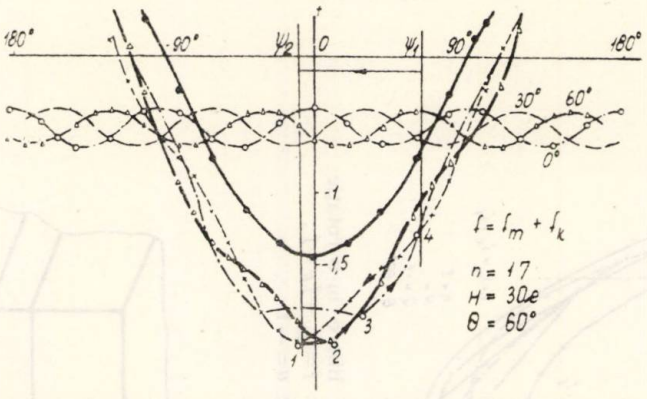


Fig. 13. Variația energiei libere la o rotație completă a cristalului : $f=f_m+f_K$; $H=3$ Oe ; $n=1{,}7$.

3. Componenta f_a pentru $a \gtrless 0$ deplasează curba rezultantă f după ordonată dar nu influențează valorile unghiulare între care se produce saltul (fig. 14).

Măsurătorile experimentale au arătat că mai există o direcție medie de salt situată la unghiuri de cca. 150° în raport cu direcția cîmpului $\vec{H}$. Apariția ei ar putea fi interpretată în felul următor. Kaczer* a arătat că în cazul pături-

* Citat după M. Rosenberg „Proprietățile magnetice ale corpului solid" p. 332, Ed. did. și ped., București, 1963.

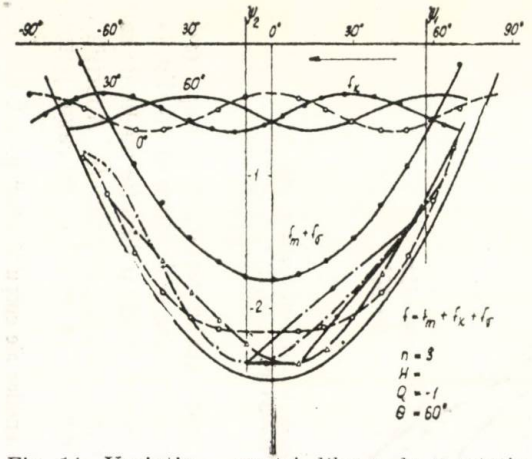


Fig. 14. Variația energiei libere la o rotație completă a cristalului : $f=f_m+f_K+f$; $H=5$ Oe : $n=3$; $a=-1$.

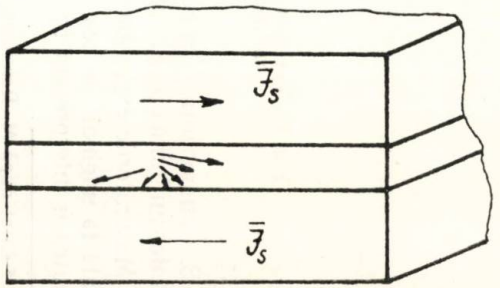


Fig. 15. Domenii separate prin pereți Néel.

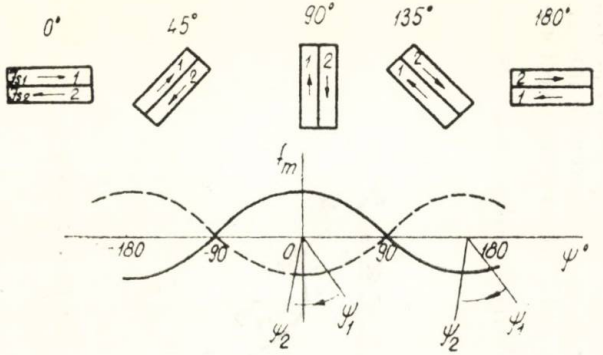


Fig. 16. Rotația a două domenii magnetizate antiparalel.

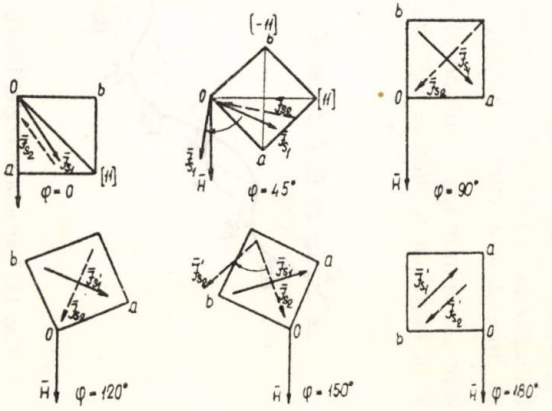


Fig. 17. Pozițiile vectorilor $\vec{J}_s$ la rotația a două domenii magnetizate antiparalel.

lor feromagnetice subțiri structuriale cu un număr mic de domenii sînt favorizate din punct de vedere energetic iar separarea între aceste domenii se face prin pereți de tip Néel (fig. 15). Pentru pături cu grosimea de cca. 1μm se poate admite, în acord cu datele experimentale cunoscute, că au o structură formată din domenii Weiss de dimensiuni relativ mari, magnetizate antiparalel și separate prin pereți Néel [8], [9], [10], [11].

Rotația în cîmpul $\vec{H}$ a două domenii magnetizate antiparalel decurge, într-o imagine simplificată, așa cum se vede în fig. 16. și 17.

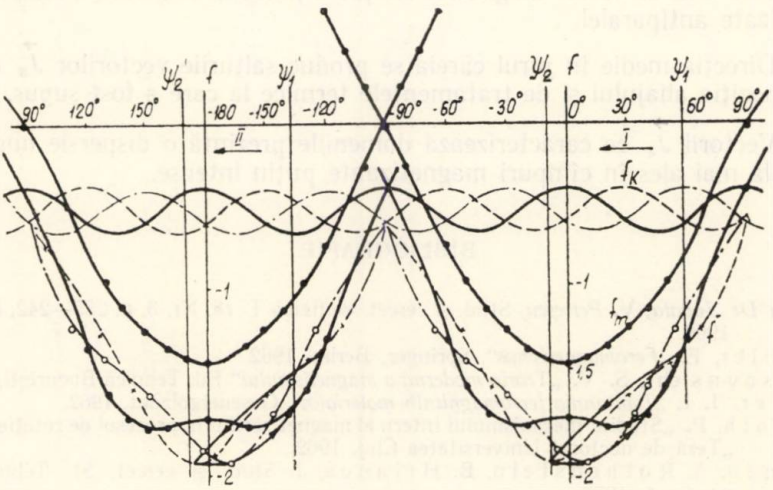


Fig. 18. Variația energiei libere pentru două domenii magnetizate antiparalel.

Calculînd variația energiei libere la rotația probei în cîmpul $\vec{H}$ pentru două domenii magnetizate antiparalel, se obțin curbele din fig. 18.

Din examinarea curbei de variație rezultă acum apariția a două poziții favorabile saltului ireversibil, situate la valori unghiulare de cca. 30° și 155°, apropiate de valorile găsite experimental.

Cercetarea structurii acestor pături de aliaj Ni—Fe prin metoda figurilor Bitter a arătat că structurile de domenii sînt simple și separate prin pereți Néel (fig. 19).

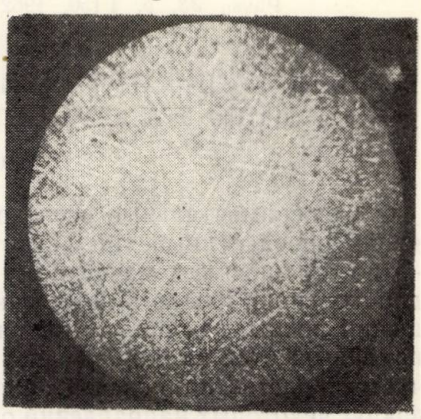


Fig. 19. Figuri Bitter pe aliaje Ni—Fe.

C. Din studiul efectuat se desprind concluziile:

1. Păturile electrolitice subțiri de Ni—Fe prezintă în mod spontan o ani-

zotropie magnetică în raport cu cîmpul magnetic în care sînt plasate. În cazul rotației probei în cîmpul $\vec{H}$ omogen, la saturația magnetică a probei, vectorii $\vec{J}_s$ de magnetizare spontană a domeniilor se nu suprapun peste direcția vectorului $\vec{H}$ ci efectuează salturi în jurul unor direcții de 30° sau 150° în raport cu $\vec{H}$, fenomen ce nu apare la păturile similare de nichel sau fier.

2. În acord cu alte cercetări prezentate în literatură, s-a atribuit această comportare unei structuri magnetice simple a păturii, domeniile succesive fiind magnetizate antiparalel.

3. Direcția medie în jurul căreia se produc salturile vectorilor $\vec{J}_s$ depinde de compoziția aliajului și de tratamentele termice la care a fost supus.

4. Vectorii $\vec{J}_s$ ce caracterizează domeniile prezintă o dispersie unghiulară decelabilă mai ales în cîmpuri magnetizante puțin intense.

BIBLIOGRAFIE

[1] *Coleta De Sabata*, V. *Petrescu*, Stud. și cercet. de fizică T. 18, Nr. 3, p. 235—242, București 1966.
[2] Kneller, E. „*Feromagnetismus*", Springer, Berlin, 1962.
[3] Vonsovns chi, S. V. „*Teoria modernă a magnetismului*" Ed. Tehnică București, 1956.
[4] Kiffer, I. I. „*Ispîtannia ferromagnitnih materialov* „Gosenergoizdat, 1962,
[5] Lamoth, P. „Studiul mecanismului intern al magnetizării prin procesul de rotație la nichel „Teză de doctorat Universitatea Cluj, 1962.
[6] Cișman, A. Rothenstein, B. Hrianca, J. Stud. și cercet. St. Tehn. T. V, nr. 3—4, 1958.
[6] Cișman, A. Rothenstein, B. Hrianca, J. Bul. St. și Tehn. IPT T. III, (17), 1958.
[8] Cișman, A. Journ. of Appl Phys. vol. 35, nr. 6, 1964
[9] Hoffman, H. Ztschr. f. Phys., *165*, p. 262, 1962.
[10] Chen, D. Morrish, A. H. Journ of Appl. Phys., *33*, p. 1 146, 1962
[11] Prosen, R. F. Holman, I. O. Gran, B. E. Cebula, T. J. Journ. of Appl. Phys., *33*, p. 1 150, 1962.

В СВЯЗИ С АНИЗОТРОПИЕЙ ПО ОТНОШЕНИЮ К МАГНИТНОМУ ПОЛЮ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКИХ ТОНКИХ СЛОЕВ

(РЕЗЮМЕ)

Экспериментальные исследования методом гистерезы вращения выявили определенный тип анизотропии тонких электролитических слоев — по отношению к магнитному полю, явление не возникающее при подобных слоях каждого компонента в отдельности. При магнитном насыщении пробы, векторы самопроизвольного намагничивания областей не накладываются на направления магнетизирующего поля H, как это случается у чистых компонентов, а совершают, из-за вращения пробы, скачки вокруг некоторых направлений образующих углы в 30° либо 150° по отно-

шению к H. Среднее направление скачка зависит от состава сплава и от термической обработки. Энергетические данные ведут к предложению, что данное явление является результатом некоторых анизотропных направлений, отделяющих векторы самопроизвольного намагничивания по данным двум возможным легким осям.

CONSIDERATIONS CONCERNAND L'ANISOTROPIE PAR RAPPORT AU CHAMP MAGNETIQUE DES COUCHES ELECTROLYTIQUES DE NI–FE

(RESUME)

Des recherches expérimentales par la méthode de l'hysterèse de rotation ont mis en évidense un type d'anisotropie des couches électrolytiques de Ne-Fi par rapport au champ magnétique, laquelle n'apparait pas pour des couches similaires des composantes prises individuellement.

Pour l'alliage étudié la saturation magnétique n'alligne pas comme d'habitude les vecteurs de magnetisation spontanée $\vec{J}_s$ dans une direction toute proche du champ magnétisant : ceux-ci font – comme suite a la rotation de l'échantillon – des saunts autour des directions qui forment des angles de 30° ou 150° avec $\vec{H}$. La direction moyenne du saunt dépend de la composition de l'alliage et des traitements thermiques qu'il a subi.

Les considérations énergétiques conduisent a l'idée que le phennomène est du a l'apparition dans la couche des directions d'anisotropie lesquelles separent les vecteurs $\vec{J}_s$ selon les deux axes faibles possibles.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848 KÖZPONTI KÖNYVTÁRA

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T. Seria Matematică-Fizică-Mecanică teoretică şi aplicată. Tomul 16(30), Fasc. 2/1971.

TRANSFORMĂRI ADIABATICE NEIZENTROPICE SUPERSONICE PE O FAMILIE DE PLANE PARALELE.

DE

C. ACKER

În [1] am prezentat un sistem diferenţial exterior al transformărilor adiabatice generale de-a lungul unei familii de plane paralele. Mişcarea fluidului ideal era raportată în acel articol la un reper local triortogonal $T\ (O\ ;\ I_1,\ I_2,\ I_3)$ având originea O într-un punct oarecare al domeniului D ocupat de fluidul ideal, versorul I_3 al acestui reper fiind egal cu $\frac{\overline{v}}{v}$ ($\overline{v}$ este vectorul viteză), iar versorul I_2 fiind ales normal planelor familiei de plane paralele de-a lungul cărora se desfăşoară mişcarea fluidului.

Referirea la sistemul diferenţial exterior menţionat o vom adopta în cele ce urmează, o dată cu respectarea tuturor notaţiilor folosite în acest articol *).

Transformările la care ne vom referi nu vor fi supuse condiţiei ca entropia să fie constantă, ceea ce lărgeşte sfera preocupărilor avute în [1]. În schimb transformările adiabatice vor fi supuse la anumite condiţii geometrice sau mecanice, pe care le menţionăm în continuare :

1) $v_t=0$ (condiţia ca modulul vitezei să fie staţionar),
2) $v_t+vv_3=0$ (condiţia ca derivata substanţială a modulului vitezei să fie nulă),
3) $v_3=0$ (condiţia ca liniile de curent să fie izotahee),
4) grad $v=0$ (condiţia ca la un moment oarecare dat, modulul vitezei să aibă aceeiaşi valoare în toate punctele domeniului D),
5) $v=$const.,
6) $q_t=0$ (condiţia ca direcţia vitezei să fie staţionară),
7) $q_t+vq_3=0$ (condiţia ca traiectoriile particulelor să fie rectilinii),
8) $q_3=0$ (condiţia ca liniile de curent să fie rectilinii),
9) $q_1,\ q_2,\ q_3=0$ (condiţia ca la un moment oarecare dat, unghiul θ între viteză şi o direcţie fixă dintr-un plan oarecare al familiei de plane paralele, să fie acelaşi în toate punctele domeniului D),

---

* Se poate obţine sistemul diferenţial exterior la care ne referim şi din cele mai generale, prezentate în [2], [3] sau [4], prin impunerea condiţiei ca formele liniare notate cu r şi p să fie nule ; precizăm doar că presiunea se va nota cu b.

10) $q=0$ (condiția ca unghiul θ de mai sus să nu depindă nici de punct și nici de timp),
11) $\rho_t+v\rho_3=0$ (condiția ca derivata substanțială a densității să fie nulă),
12) $\rho_3=0$ (condiția ca densitatea să fie constantă de-a lungul unei linii de curent oarecare, la un moment oarecare dat),
13) grad $\rho=0$ (condiția ca la un moment oarecare dat, densitatea dă fie aceeași în toate punctele domeniului D),
14) $\rho=$const.,
15) $b_t+vb_3=0$ (condiția ca derivata substanțială a presiunii să fie nulă),
16) $b_3=0$ (condiția ca liniile de curent să fie izobare),
17) grad $b=0$ (condiția ca la un moment oarecare dat, presiunea să fie aceeași în toate punctele domeniului D),
18) $b=$const.

În vederea efectuării unui sondaj asupra existenței și arbitrarietății diferitelor clase de transformări examinate, s-a cercetat involuția sistemului diferențial exterior indicat mai sus, completat pe rînd cu ecuațiile ce caracterizează transformările adiabatice speciale considerate.

Pentru stabilirea involuției acestor sisteme diferențiale exterioare utilizate, am construit doar următoarele lanțuri de elemente integrate:

a) $e_1\,(\omega^2=\omega^3=dt=0,\ dv=v'_1\omega^1,\ \ldots)$, $e_2\,(\omega^3=dt=0,\ dv=v'_1\omega^1+v'_2\omega^2,\ \ldots)$,
$e_3\,(dt=0,\ dv=v'_1\omega^1+v'_2\omega^2+v'_3\omega^3\ \ldots)$, $e_4\,(dv=v'_1\omega^1+v'_2\omega^2+v'_3\omega^3+v'_t dt,\ \ldots$;
b) $e_1\,(\omega^1=\omega^2=\omega^3=0,\ dv=v'_t dt,\ \ldots)$, $e_2\,(\omega^2=\omega^3=0,\ dv=v'_t dt+v'_1\omega^1,\ \ldots)$;
$e_3\,(\omega^3=0,\ dv=v'_t dt+v'_1\omega^1+v'_2\omega^2,\ \ldots)$, $e_4\,(dv=v'_t dt+v'_1\omega^1+v'_2\omega^2+v'_3\omega^3,\ \ldots)$;
c) $e_1\,(\omega^2=\omega^3=\omega^1=0,\ dv=v'_t dt,\ \ldots)$, $e_2\,(\omega^3=\omega^1=0,\ dv=v'_t dt+v'_2\omega^2,\ \ldots)$,
$e_3\,(\omega^1=0,\ dv=v'_t dt+v'_2\omega^2=v'_3\omega^3,\ \ldots)$, $e_4\,(dv=v'_t dt+v'_2\omega^2+v'_3\omega^3+v'_1\omega^1,\ \ldots)$.

În cele ce urmează, rezultatele pe care le-am obținut în privința existenței și arbitrarietății transformărilor cercetate, vor fi redate pe scurt (dat fiind numărul lor mare) după modelul următor

Cl. 1) la ; 9, 4, 4, 4 ; 1 $f(4)$, Φ_1/fmn ; $4f(3)$, v_3, ρ_3, b_3, q_3/Φ_1 pr., ceea ce înseamnă : clasei de transformări adiabatice pe o familie de plane paralele, supuse *condiției (1)*, i s-a stabilit existența construind *lanțul de elemente integrale* (*a*) ; s-au găsit *caracterele reduse* $s_0=9$, $s_1=s_2=s_3=4$; această clasă de transformări depinde de *1 funcție arbitrară de 4 argumnete, anume* Φ_1 (proiecția forței masice pe o direcție din planele familiei de plane paralele, perpendiculară pe viteză), *dacă forțele masice sînt* oarecari (*neprescrise*) ; aceeași clasă de transformări depinde de *4 funcții arbitrare de 3 argumente, dacă* Φ_1 *este prescrisă*. Alt exemplu :

Cl. 73) 5, 14, 18, *c* ; 4, 1, 1, 1 ; 1 $f(3)$, q_3/fmn, ceea ce înseamnă : clasei de transformări adiabatice pe o familie de plane paralele, supuse *condițiilor 5, 14, 18,* i s-a stabilit existența construindu-se *lanțul de elemente integrale* (*c*) ; s-au găsit *caracterele* $s_0=4$, $s_1=s_2=s_3=1$; această clasă depinde de *1 funcție arbitrară de 3 argumente, anume* q_3 (curba liniei de curent), *dacă forțele masice sînt* oarecari (*neprescrise*).

Dăm mai jos asemenea rezultate.

Cl. 1) la și Cl. 2) 2a : 9, 4, 4, 4 ; 1 $f(4)$, Φ_1/fmn ; $4f(3)$, v_3, ρ_3, b_3, q_3/Φ_1 pr.
Cl. 3) 3*b*, Cl. 4) 11, *b*, Cl. 5) 12, *b*, Cl. 6) 15, *b*, Cl, 7) 16, *b* : 9, 4, 4, 4 ; 1 $f(4)$, Φ_1/fmn ; $4f(3)$, v_2, ρ_2, b_2, q_2/Φ_1 pr.

Cl. 8) $4b$; 8, 4, 3, 3 ; 1 $f(4)$, Φ_1/fmn ; $3f(3)$, ρ_2, b_2, q_2/Φ_1 pr.
Cl. 9) $5a$; 7, 3, 3, 3 ; 1 $f(4)$, Φ_1/fmn ; $3f(3)$, ρ_3, b_3, q_3/Φ_1/pr.
Cl. 10) $6a$ și Cl. 11) $7a$: 9, 4 4, 4 ; 1 $f(4)$, Φ_3/fmn ; $4f(3)$, v_3, ρ_3, b_3, q_3/Φ_3 pr.
Cl. 12) $8b$; 9, 4, 4, 4 ; 1 $f(4)$, Φ_3/fmn ; $4f(3)$, v_2, ρ_2, b_2, q_2/Φ_3 pr.
Cl. 13) $9b$; 8, 4, 3, 3 ; 1 $f(4)$, Φ_3/fmn ; $3f(3)$, v_2, ρ_2, b_2/Φ_3 pr.
Cl. 14) 10, a ; 8, 3, 3, 3 ; 1 $f(4)$, Φ_3/fmn ; $3f(3)$, v_3, ρ_3, b_3/Φ_3 pr.
Cl. 15) 13, b ; 8. 4, 3, 3 ; 1 $f(4)$, Φ_1/fmn ; $3f(3)$, v_2, b_2, q_2/Φ_1 pr.
Cl. 16) 14, b ; 7, 3, 3, 3: 1 $f(4)$, Φ_1/fmn ; $3f$ (3), v_2, b_2, q_2/Φ_1/pr.
Cl. 17) 17, b ; 8, 4, 3, 3 ; 1 $f(4)$, Φ_1/fmn ; $3f(3)$, v_2 ρ_2, q_2/Φ_1 pr.
Cl. 18) 18, b ; 7, 3, 3, 3 ; 1 $f(4)$, Φ_1/fmn ; $3f(3)$, v_2, q_2, ρ_2/Φ_1 pr.
Cl. 19) 1, 6, a, Cl. 20) 1, 7, a, Cl, 21) 2, 6, a, Cl, 22) 2, 7, a: 10,4 4, 4 ; $4f$ (3), v_3, ρ_3, b_3, q_3/fmn.
Cl. 23) 1, 10, a și Cl. 24) 2, 10, a : 9, 3, 3, 3 ; $3f$ (3), v_3, ρ_3, b_3/fmn.
Cl. 25) 2, 8, b, Cl. 26) 3, 7, b, Cl. 27) 3, 8, b, Cl. 28) 7, 11, b,
Cl. 29) 7, 12, b, Cl. 30) 8, 11, b, Cl. 31) 8, 12, b, Cl. 32) 7, 15, b, Cl.33) 7, 16, b, Cl. 34) 8, 15, b și Cl. 35) 8, 16, b : 10,4, 4, 4 ; $4f(3)$, v_2, ρ_2, b_2, q_2/fmn.
Cl. 36) 2, 9, b, Cl. 37) 3, 9, b, Cl. 38) 9, 11, b, Cl. 39) 9, 12, b,
Cl. 40) 9, 15, b, Cl. 41) 9, 16, b : 9, 4, 3, 3, $3f(3)$, v_2, ρ_2, b_2/fmn.
Cl. 42) 3, 10, b, Cl. 43) 10, 11, b, Cl. 44) 10, 12, b, Cl. 45) 10, 15, b,
Cl. 46) 10, 16, b : 9, 3, 3, 3 ; $3f(3)$, v_2, ρ_2, b_2/fmn.
Cl. 47) 4, 7, b și Cl. 48) 4, 8, b : 9, 4, 3, 3 ; $3f(3)$, ρ_2, b_2, q_2/fmn.
Cl. 49) 4, 9, b ; 8, 4, 2, 2, ; $2f(3)$, ρ_2, b_2/fmn.
Cl. 50) 4, 10, b ; 8, 3, 2, 2, ;$2f(3)$, ρ_2, b_2/fmn.
Cl. 51) 5, 6, a și Cl. 52) 5, 7, a : 8, 3, 3, 3 ; $3f(3)$, ρ_3, b_3, q_3/fmn.
Cl. 53) 5, 8, b ; 8, 3, 3, 3 ; $3f(3)$, ρ_2, b_2, q_2/fmn.
Cl. 54) 5, 9, b ; 7, 3, 2, 2 ; $2f(3)$, ρ_2, b_2/fmn.
Cl. 55) 5, 10, a ; 7, 2, 2, 2 ; $2f(3)$, ρ_3, b_3/fmn.
Cl. 56) 7, 13, b și Cl. 57) 8, 13, b : 9, 4, 3, 3 ; $3f(3)$, v_2, b_2, q_2/fmn.
Cl. 58) 7, 14, b și Cl. 59) 8, 14, b : 8, 3, 3, 3 ; $3f(3)$, v_2, b_2, q_2/fmn.
Cl. 60) 9, 13, b ; 8, 4, 2, 2 ; $2f(3)$, v_2, b_2/fmn.
Cl. 61) 9, 14, b ; 7, 3, 2, 2 ; $2f(3)$, v_2, b_2/fmn.
Cl. 62) 10, 13, b ; 8, 3, 2, 2 ; $2f(3)$, v_2, b_2/fmn.
Cl. 63) 10. 14, b ; 7, 2, 2, 2 ; $2f(3)$, v_2, b_2/fmn.
Cl. 64) 7, 17, b și Cl. 65) 8, 17, b : 9, 4, 3, 3 ; $3f(3)$, v_2, ρ_2, q_2/fmn.
Cl. 66) 7, 18, b și Cl. 67) 8, 18, b : 8, 3, 3, 3 ; $3f(3)$, v_2, ρ_2, q_2/fmn.
Cl. 68) 9, 17, b ; 8, 4, 2, 2,; $2f(3)$, v_2, ρ_2/fmn.
Cl. 69) 9, 18, b ; 7, 3, 2, 2, ; $2f(3)$, v_2, ρ_2/fmn.
Cl. 70) 10, 17, b ; 8, 3, 2, 2 ; $2f(3)$, v_2, ρ_2/fmn.
Cl. 71) 10, 18, b ; 7, 2, 2, 2 ; $2f(3)$, v_2, ρ_2/fmn.
Cl. 72) 14, 18, b(sau c) ; 5, 2, 2, 2 : 1 $f(4)$, Φ_1/fmn ; $2f(3)$, v_2, $q_2(v_3, q_3)$ Φ_1 pr.
Cl. 73) 5, 14, 18, c ; 4, 1, 1, 1 ; 1 $f(3)$, q_3/fmn.
Cl. 74) 7, 14, 18, b și Cl. 75) 8, 14, 18, b : 6, 2, 2, 2 ; $2f(3)$, v_2, q_2/fmn.
Cl. 76) 10, 14, 18, b ; 5, 1, 1, 1 ; 1 $f(3)$, v_2/fmn.
Cl. 77) 5, 10, 14, 18, a sau b sau c ; 3, 0, 0, 0 ; 3 constante și anume v, b.*

*) Transformările din clasa 77 pot avea loc exclusiv în lipsa forțelor masice.

Observaţii. 1. Nu au fost necesare prelungiri de ordinul al 2-lea pentru a stabili involuţia sistemelor diferenţionale exterioare utilizate.

2. Adăugarea la sistemele diferenţiale exterioare considerate, a ecuaţiilor

$$V=(1, \ldots+F^2)\cdot\sqrt{-\frac{\partial\psi}{\partial\rho}/\frac{\partial\psi}{\partial b}}\,, \qquad (s)$$

sau

$$V=(K+F^2)\cdot\sqrt{-\frac{\partial\psi}{\partial\rho}/\frac{\partial\psi}{\partial b}}\ ^{*)} \qquad (h)$$

ce caracterizează transformările adiabatice desfăşurate în regim supersonic generic, respectiv în regim hipersonic, implică creşterea cu cîte o unitate a primelor caractere reduse (s_0) ce s-au obţinut precum şi a numărului de funcţii necunoscute, ceea ce lasă neschimbate rezultatele prezentate privitor la existenţa şi arbitrarietatea claselor de transformări enumerate mai sus. Se pot astfel completa rezultatele anterioare, fără calcul, prin considerarea în paralel, pentru fiecare dintre clasele de transformări cercetate şi a regimului de mişcare supersonică (în particular hipersonică).

3. Funcţiile arbitrare de care depind transformările claselor puse în evidenţă au următoarele semnificaţii (cunoscute de astfel din articolele publicate anterior):

- v_2, ρ_2, b_2, q_2 sînt derivatele pe direcţia normală planelor familiei (P) de plane paralele pe care se desfăşoară mişcarea, a modulului vitezei, a densităţii, a presiunii şi a unghiului format de viteză cu o direcţie fixă din planele familiei (P);
- v_3, ρ_3, b_3, q_3 sînt derivatele aceloraşi mărimi, considerate în aceeaşi ordine, pe direcţia liniei de curent;
- Φ_3, Φ_1 sînt proiecţiile forţei masice pe direcţia vitezei, respectiv pe direcţia versorului I_1 a reperului T.

BIBLIOGRAFIEA

1. Acker C.: „Considérations sur l'existence et l'arbitraire des mouvements adiabatiques d'un fluide idéal le long d'une famille de plans parallèles", Buletin de la Société Scientifique de Bretange, T. XLIV, p. 139-143, 1969.
2. — : „Mouvements adiabatiques", Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées, Tome XV, nr. 5, p. 652—664, 1970.
3. — : „Quelques résultats d'une étude locale concernant les mouvements adiabatiques holonômes d'un fluide idéal", Archiwum Mechaniki Stosowanej, T. 22, nr. 3, p. 297—302, 1970.
4. — : „Teoreme de existenţă ale mişcărilor adiabatice neolonome", Studii şi Cercetări Matematice Tom 22, nr. 10, p. 1 399—1 404, 1970.

*) Constanta K are o valoare dintre cele mai mici ale numărului local Mach, corespunzătoare regimurilor de mişcare considerate (numite) hipersonice.

СВЕРХЗВУКОВЫХ НЕИЗЭНТРОПИЧНЫЕ АДИАБАТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, ВДОЛЬ СЕМЕЙСТВО ПАРАЛЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

(РЕЗЮМЕ)

Он изучает существование и произвольность сверхзвуковые неизэнтропичные адиабатические преобразование вдоль семейство паралельной плоскости, с помощью теори внешных диференциальных системов и движующеся репер Картана.

TRANSFORMATIONS ADIABATIQUES ANISENTROPIQUES SUPERSONNIQUES LE LONG D'UNE FAMILLE DE PLANS PARALLELES.

(RESUME)

On a exécuté un sondage sur l'existence et l'arbitraire des transformations adiabatiques anisentropiques supersonniques, le long d'une famille de plans parallèles, en utilisant la théorie des systèmes différentiels extériuers et du repère mobil de E. Cartan.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată. Tomul 16(30),
Fasc. 2/1971.

STUDIUL MIŞCĂRILOR VIBROPERCUTANTE ALE UNEI MASE LIBERE ÎNTRE DOI LIMITATORI CU EXCITAŢIE CINEMATICĂ

DE

GH. SILAŞ, L. BRÎNDEU

Omagiu Profesorului O. Em. Gheorghiu cu ocazia celei de a 50-a aniversări.

În studiul vibropercuţiilor un rol important revine maselor care se ciocnesc şi sînt cuprinse în cupele percutante ale sistemului [1]. Prin cuplă percutantă se înţelege ansamblul format din două elemente ale sistemului vibropercutant care se ciocnesc între ele în timpul mişcării.

Majoritatea sistemelor vibropercutante studiate conţin o singură cuplă percutantă.

Sisteme cu două cuple percutante au fost considerate mai ales la amortizoarele de vibraţii cu ciocniri [2]. Pentru aceste sisteme s-au determinat în special mişcările periodice simetrice.

În această lucrare vom considera exemple simple de sisteme vibropercutante cu două cuple percutante care se pot studia complet fără nici-o particularizare De asemenea se arată că dacă una din masele ce formează o cuplă percutantă dispare, metodele de studiu folosite nu se modifică.

1. SISTEM CU LIMITATORI RIGIZI

Sistemul vibropercutant considerat în fig. 1 este format din masa m ce se poate deplasa fără frecare pe orizontală între un limitator fix şi unul mobil.

Poziţiile masei m şi a limitatorului mobil se determină prin coordonatele q şi ξ. Funcţia dată $\xi=\xi(t)$ este periodică de perioadă T, deci $\xi(t+T)=\xi(t)$. Coeficienţii de restituire la ciocnirile presupuse instantanee, din cele două cuple percutante, sînt R_1 şi R_2.

Pentru studiul ciocnirilor se va folosi metoda funcţiei legăturii unilaterale [3], [4] ; care în acest caz va fi

$$f(q, t)=\xi(t)\, q-q^2\geqslant 0. \tag{1}$$

Mișcarea masei m poate fi mai ușor urmărită în planul fazelor (fig. 2). Aici s-a considerat că ciocnirea de ordin k între masă și limitatorul mobil ce apare la momentul $t=t_k$, are vitezele dinainte și de după ciocnire $\dot{q}_k$ respectiv $\dot{q}'_k$.

Ținînd seama de forma legăturii unilaterale (1), între aceste viteze se poate scrie relația

$$\dot{q}'_k = -R_2\dot{q}_k + (1+R_2)\,\dot{\xi}\,(t_k). \tag{2}$$

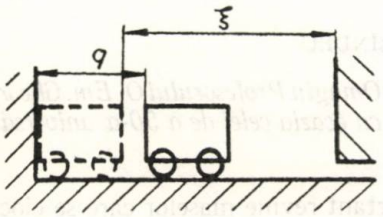


Fig. 1.

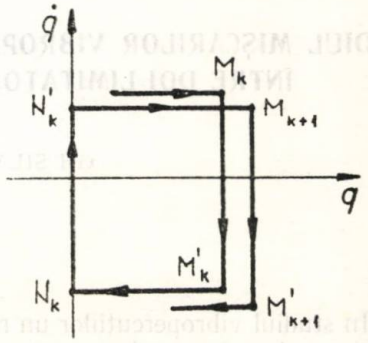


Fig. 2.

De asemenea, dacă pentru $t=\tau_k$ $(t_k<\tau_k<t_{k+1})$ are loc ciocnirea cu limitatorul fix, la sfîrșitul acestei ciocniri viteza va fi $\dot{q}'(\tau_k) = -R_1\dot{q}(\tau_k)$.

În planul fazelor, mișcarea se reprezintă cu ajutorul punctelor $M_k[\xi(t_k), \dot{q}_k]$, $M'_k[\xi(t_k), \dot{q}'_k]$, $N_k[0, \dot{q}(\tau_k)=\dot{q}'_k]$ și $N'_k[0, \dot{q}'_k(\tau_k)=\dot{q}_{k+1}]$ $(k=', 2, \ldots)$. Ciocnirile de ordin k ale masei cu limitatorul mobil și cu cel fix se reprezintă prin segmentele verticale $M_kM'_k$ respectiv $N_kN'_k$. Mișcarea corespunzătoare deplasării punctului reprezentativ pe segmentul M'_kN_k este uniformă și se face după legea

$$q(t) = \xi(t_k) + (t-t_k)\,q'_k \quad (t_k<t<\tau_k). \tag{4}$$

Deoarece $q(\tau_k)=0$, rezultă

$$\tau_k = t_k - \frac{\xi(t_k)}{\dot{q}'_k},$$

și deci $\dot{q}'_k(\tau_k) = -R_1\dot{q}(\tau_k) = -R_1\dot{q}'_k$. Corespunzător segmentului N'_kM_{k+1} mișcarea masei m este tot uniformă și se face după legea

$$q(t) = -R_1\xi(t_k) - R_1(t-t_k)\,\dot{q}'_k, \quad (\tau_k<t_k<t_{k+1}). \tag{4}$$

Ținînd seama de relația (2) și de condițiile $q(t_{k+1})=\xi(t_{k+1})$, $\dot{q}(t_{k+1})=\dot{q}_{k+1}$, se obțin ecuațiile

$$\zeta(t_{k+1}) = -R_1\xi(t_k) + (t_{k+1}-t_k)\,\dot{q}_{k+1} \tag{5}$$

și

$$\dot{q}_{k+1}=R_1R_2\dot{q}_k-R_1(1+R_2)\dot{\xi}(t_k). \tag{6}$$

Mișcările periodice ale sistemului vor avea perioada $t_{k+1}-t_k=rT$ $(r=1,2,\ldots)$. Pentru ca mișcarea să fie perioidcă mai este necesar ca $M_k=M_c$ $(k=1,2,\ldots)$. Punctul M_c $[\xi(t_0), \dot{q}_c]$ corespunde în mișcarea periodică începutului ciocnirii cu limitatorul mobil. Poziția punctului M_c se determină cu ajutorul ecuațiilor (5) și (6), din care rezultă

$$\dot{q}_c=\frac{(1+R_1)\dot{\xi}(t_0)}{rT}=-\frac{R_1(1+R_2)\dot{\xi}(t_0)}{1-R_1R_2}. \tag{7}$$

Stabilitatea mișcărilor periodice se studiază folosind metoda perturbațiilor Datorită perturbării inițiale parametrilor ciocnirii de ordin k, viteza $\dot{q}_k$ și momentul $t=t_k$ $(k=1,2,\ldots)$, le corespund perturbații mici. Punctul respectiv M_k $[\xi(t_0+\Delta t_k), \dot{q}_c+\Delta\dot{q}_k]$, $(k=1,2,\ldots)$ se va afla într-o vecinătate a punctului $M_c[\xi(t_0), \dot{q}_c]$. Ecuațiile (5) și (6), neglijînd din dezvoltările în serie puterile perturbațiilor superioare unității, devin

$$\begin{aligned} rT\Delta\dot{q}_{k+1}&=\dot{\xi}(t_0)\left[\frac{(1+R_1)}{1-R_1R_2}\Delta t_{k+1}-\frac{R_1R_2(1+R_1)}{1-R_1R_2}\Delta t_k\right]\\ \Delta\dot{q}_{k+1}-R_1R_2\Delta\dot{q}_k&=-R_1(1+R_2)\ddot{\xi}(t_0)\Delta t_k. \end{aligned} \tag{8}$$

Acest sistem de ecuații în diferențe finite se rezolvă luînd soluții de forma $\Delta\dot{q}_k=v\beta^k$ și $\Delta t_k=\theta\beta^k$ $(k=1,2,\ldots)$. Punînd condiția că sistemul liniar și omogen în v și θ să aibă suloțiii nenule, rezultă ecuația caracteristică

$$\beta^2-\left[2R_1R_2-\frac{rTR_1(1+R_2)(1-R_1R_2)}{1+R_1}\frac{\ddot{\xi}(t_0)}{\dot{\xi}(t_0)}\right]\beta+R_1^2R_2^2=0. \tag{9}$$

Punctul M_k tinde asimptotic către M_c dacă rădăcinile ecuației caracteristice în β (9) sînt în modul subunitate. În acest caz mișcarea periodică va fi asimptotic stabilă. Condițiile ca rădăcinile ecuației (9) să aibă rădăcinile în modul subunitate rezultă aplicînd criteriul lui Schur [2]. În primul rînd este necesar să avem $R_1R_2<1$, adică cel puțin una dintre ciocniri să nu fie perfect elastică. De asemenea mai trebuie să fie verificate inegalitățile

$$-\frac{(1+R_1)(1-R_1R_2)}{rTR_1(1+R_2)}<\frac{\ddot{\xi}(t_0)}{\dot{\xi}(t_0)}<\frac{(1+R_1)(1+R_1R_2)^2}{rTR_1(1+R_2)(1-R_1R_2)} \tag{10}$$

care reprezintă de fapt condiția de stabilitate a mișcărilor periodice.

2. SISTEM CU UN LIMITATOR ELASTIC ȘI UNUL RIGID

Sistemul vibropercutant arătat în fig. 1 se deosebește de cel din fig. 3 prin aceea că limitatorul rigid este înlocuit printr-un sistem elastic cu un grad de libertate cuprinzînd arcul cu constanta elastică k și masa m_0. Pentru studiul sistemului vibropercutant se folosesc coordonatele q_0 și q ale maselor m_0 și m. Sistemul are deci două grade de libertate și două cuple percutante.

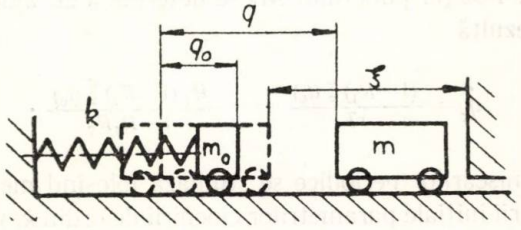


Fig. 3.

Reprezentarea analitică a acestor cuple percutante se poate face cu ajutorul legăturii unilaterale:

$$f(q, q_c, t) = (q - q_0)\,[\xi(t) - q] \geqslant 0. \tag{11}$$

Dacă se ia $m_0 = 0$, sistemul vibropercutant va avea un limitator elastic fără inerție și o caracteristică biliniară (fig. 4).

Mișcările periodice ale sistemului vibropercutant din fig. 4 se studiază analog ca și în cazul a două cuple percutante (fig. 1). Spre deosebire însă de cazul anterior, masa se mișcă în contact cu arcul un interval finit de timp (τ'_k, τ''_k).

În planul fazelor deplasarea între punctele $N_k\,[0, \dot{q}(\tau'_k) = \dot{q}'_k]$ și $N'_k\,[0, \dot{q}(\tau''_k) = -\dot{q}'_k]$ se face pe arcul de elipsă cu centrul în punctul 0. Acestei deplasări îi corespunde mișcarea, avînd legea

$$q = \frac{\dot{q}'_k}{p} \sin p\,(t - \tau'_k) \tag{12}$$

unde

$$\tau'_k = t_k - \frac{\xi(t_k)}{\dot{q}'_k}, \quad p = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{12}$$

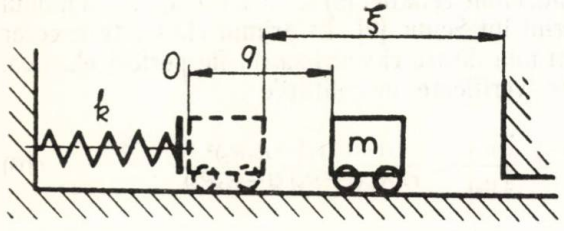


Fig. 4.

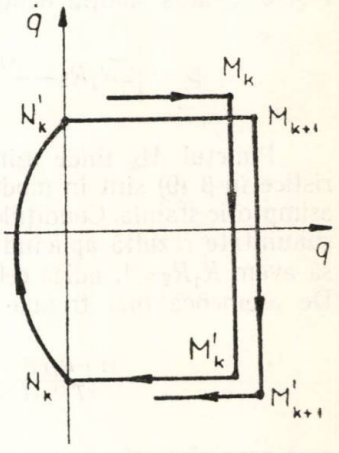


Fig. 5.

Sfîrșitul mișcării are loc pentru $q(\tau_k'')=0$ și are loc la momentul

$$\tau_k''=\tau_k'+\frac{\pi}{p}$$

cînd viteza masei este $\dot{q}(\tau_k'')=-\dot{q}_k'$.

În continuare mișcarea este uniformă și se face după legea

$$q(t)=-\xi(t_k)-\left(t-t_k-\frac{\pi}{p}\right)\dot{q}_k'. \tag{13}$$

Din condițiile de la sfîrșitul perioadei mișcării $q(t_{k+1})=\xi(t_{k+1})$ și $\dot{q}(t_{k+1})=\dot{q}_{k+1}$, se obțin ecuațiile de recurență

$$\xi(t_{k+1})=-\xi(t_k)+\left(t_{k+1}-t_k-\frac{\pi}{p}\right)\dot{q}_{k+1} \tag{14}$$

și

$$\dot{q}_{k+1}=R_2\dot{q}_k-(1+R_2)\dot{\xi}(t_k). \tag{15}$$

Mișcările periodice cu perioada $t_{k+1}-t_k=rT$ $(r=1,2,\ldots)$ se realizează dacă $M_k=M_c[\dot{q}_c, \xi(t_0)]$ $(k=1,2,\ldots)$. Parametrii mișcării periodice, viteza $\dot{q}_c$ și momentul ciocnirii inițiale $t=t_0$, se determină din ecuațiile

$$\dot{q}_c=\frac{2\xi(t_0)}{rT-\frac{\pi}{p}}=-\frac{1+R_2}{1-R_2}\dot{\xi}(t_0). \tag{16}$$

Folosind metoda perturbațiilor, studiul stabilității se face la fel ca și în cazul a două cuple percutate (fig. 1). Se obțin astfel ecuațiile în diferențe finite

$$\begin{aligned}\left(rT-\frac{\pi}{p}\right)\Delta\dot{q}_{k+1}&=\frac{2\dot{\xi}(t_0)}{1-R_2}(\Delta t_{k+1}-R_2\Delta t_k)\\ \Delta\dot{q}_{k+1}-R_2\Delta\dot{q}_k&=-(1+R_2)\ddot{\xi}(t_0)\Delta t_k.\end{aligned} \tag{17}$$

Rădăcinile ecuației caracteristice

$$\beta^2-\left[2R_2-\frac{1}{2}\left(rT-\frac{\pi}{p}\right)(1-R_2^2)\frac{\dddot{\xi}(t_0)}{\ddot{\xi}(t_0)}\right]\beta+R_2^2=0 \tag{18}$$

sînt în modul subunitate pentru $R_2<1$, dacă sînt verificate inegalitățile

$$-\frac{2(1-R_2)}{\left(rT-\frac{\pi}{p}\right)(1+R_2)}<\frac{\dddot{\xi}(t_0)}{\ddot{\xi}(t_0)}<\frac{2(1+R_2)}{\left(rT-\frac{\pi}{p}\right)(1-R_2)}. \tag{19}$$

Prin urmare în cazul ciocnirilor elastico-plastice cu limitatorul rigid ($R_2 \neq 1$), mișcările periodice sînt stabile dacă este verificată condiția (19).

3. MIȘCĂRI PERIODICE ÎN CAZUL UNEI EXCITĂȚII ARMONICE

Pentru studiul mișcărilor priodice ale sistemelor vibropercutante din figurile 1 și 4 s-a folosit aceeași metodă.

Se poate ușor constata că și rezultatele care se obțin sînt asemănătoare. Aceasta este mai simplu de arătat în cazul unei excitații armonice

$$\xi(t) = a \cos \omega t + b \quad (a, b > 0) \tag{20}$$

unde se va presupune $a \geqslant b$ pentru a avea $\xi(t) \geqslant 0$. De asemenea ciocnirea cu limitatorul fix (fig. 1) se consideră perfect elastică ($R_1 = 1$). Astfel în figurile 1 și 4 unul din limitatori este fie rigid ci cu ciocniri elastice, fie elastic și fără ciocniri.

Mișcările periodice ale sistemului din fig. 1 se determină înlocuind expresia (20) în relațiile (7). Parametrii mișcării vor fi dați de ecuațiile

$$\sin \omega t_0 = \frac{\alpha b \pm \sqrt{(1+\alpha^2)\, a^2 - b^2}}{(1+\alpha^2)\, a}, \qquad \dot{q}_c = \frac{\omega}{\pi r} \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \left[\alpha b \pm \sqrt{(1+\alpha^2)\, a^2 - b^2}\right] \tag{21}$$

unde $\alpha = \frac{\pi r (1+R_2)}{1-R_2}$. Evident mișcările sînt posibile numai dacă $a \leqslant b \leqslant a\sqrt{1+\alpha^2}$. Condițiile de stabilitate (10), în acest caz devin

$$-\alpha^{-1} < \operatorname{tg} \omega t_0 < \alpha^{-1}. \tag{22}$$

Pentru sistemul din fig. 4, parametrii mișcărilor periodice se obțin tot din ecuațiile (21) iar condițiile de stabilitate din inegalitățile (22) în care însă se va înlocui r prin $r - \frac{\omega}{2p}$, $\left|\frac{\omega}{2p} < r\right|$.

Contactul dintre masă și limitatorul elastic (fig. 4) se face fără ciocnire și durează un timp finit. Se poate folosi însă pentru studiu legătura unilaterală (11), ceea ce înseamnă că sistemul poate fi privit ca avînd două cuple percutate [4].

BIBLIOGRAFIE

L. Kobrinski A. E., Tîves L. I.: Dinamika i ustoivicosti sistem soderjașcih dve udarnîe parî. Mașinovedenie, Nr. 4, 1965.

2. Kobrînski A. E..; Mehanizmî s uprughimi sviaziami. Izd. Nauka, Moskva, 1957.

3. Silaș Gh. Brîndeu L. Behandlung periodischer Bewegungen von Rüttelsystemen mit den Lagrangeschen Gleichungen. VDI Berichte, Nr. 135, 1969.

4. Brîndeu L.: Contribuții privind studiul mișcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante. Teză de doctorat. Inst. politehnic Timișoara, 1970.

К ВИБРОУДАРНОМУ ДВИЖЕНИЮ СВОБОДНОЙ МАССЫ МЕЖДУ ДВУМЯ УПОРАМИ С КИНЕМАТИЧЕСКИМ ВОЯБУЖДЕНИЕМ

(РЕЗЮМЕ)

Рассматривается вибуроударная система состоящая из массы m совершающей свободное движение по горизонтали между двумя упорами. Масса m, соударяется с одним из упоров совершающим заданное периодическое движение. Что касается второго упора, принимаются два случая : жесткий или упругий без массы. Таким образом в первом случае система содержит две ударные пары, а во втором лишь одну с билинейной характеристикой.

Предполагая заданным период кинетического возбуждения T, определяются в обоих случаях периодические движения с периодом $rT (r=1,2,\ldots)$, а также условия существования.

Устойчивость периодических движений исследуется по методу возбуждений.

Полученные результаты применяются к частному случаю гармонического возбуждения.

THE STUDY OF SHOCK-VIBRATION MOVEMENT OF A FREE MASS BETWEEN THE TWO LIMITERS WITH THE KINEMATIC EXCITATION

(SUMMARY)

There is considered a shock-vibration system consisting of a mass m which moves freely on a horizontal line between two limiters. The mass m is knocked against one of the limiters which has an imposed periodical movement. In connection whith the second limiter, two different situation are supposed. In the first case the limiter is rigid, and in the second case it is elastic without mass. In this way, in the first case the system has two percussive pairs, and in the second case, only one, but with a biliniar characteristic.

Considering T the period of done kinematic excitation, in both case, the periodical movements having the period rT $(r=1, 2,\ldots)$ and the conditions of existence are determined.

The stability of periodical movement is studied uisng the perturbation method. The obtained results are individualized to the case of an harmonical excitation.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată. Tomul 16(30),
Fasc. 2/1971.

STUDIUL MIŞCĂRILOR STAŢIONARE ALE UNUI SISTEM AUTONOM CU TREI GRADE DE LIBERTATE

DE

GH. SILAŞ, I. GROŞANU

Omagiu Profesorului Octavian Em. Gheorghiu cu ocazia celei de a 50-a aniversări

La studiul vibraţiilor sistemelor mecanice cu legături elastice liniare, sau neliniare, trebuie să se ţină seama şi de interacţiunea sistemului cu motorul de acţionare. Numai astfel se pot explica fenomenele complexe ce apar în sistemele concrete, care sînt acţionate cu motoare de putere limitată. Pentru studiul vibraţiilor unor sisteme de acest tip în apropierea domeniilor de rezonanţă, s-au considerat caracteristicile statice ale motoarelor electrice [5], [2], [8], [11]. În alte lucrări [2], [5], [7], [12], pentru studiul vibraţiilor sistemelor autonome, s-au folosit ecuaţiile electromecanice, motoarele de acţionare fiind motoare electrice de curent continuu.

În această lucrare se consideră sistemul din fig. 1 care se foloseşte ca model aproximativ al uni vibrator inerţial, montat elastic pe un pilot de masă m_2. Se admite că momentul echivalent al cuplului dezvoltat de motorul electric, este liniar în raport cu viteza unghiulară instantanee $\dot{\varphi}$, legăturile sistemului se consideră elastice şi amortizările vîscoase.

Ecuaţiile de mişcare ale sistemului sînt :

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1+k_1(x_1-x_2)=m_0r(\dot{\varphi}^2\sin\varphi-\ddot{\varphi}\cos\varphi)\\ &m_2\ddot{x}_2-k_1(x_1-x_2)+c\dot{x}_2+kx_2=0\\ &J\ddot{\varphi}+c_1\dot{\varphi}=m_0r\ddot{x}_1\cos\varphi+M_0-M\dot{\varphi} \end{aligned} \tag{1}$$

La mişcarea de translaţie s-a considerat numai amortizarea dintre pilot şi sol.

Pentru studiul regimurilor staționare periodice, apropiate de cele care se obțin la o rotație uniformă a rotorului motorului de acționare, se folosesc notațiile:

$$m_1=m+m_0, \quad y_1=\frac{x_1}{r}, \quad y_2=\frac{x_2}{r}, \quad \omega_1^2=\frac{k_1}{m_1}, \quad \tau=\omega_1 t$$

$$\mu=\frac{m_0}{m_1}, \quad 2D=\frac{c}{m_2\omega_1}, \quad \gamma_1^2=\frac{k_1}{m_2\omega_1^2}, \quad \gamma_2^2=\frac{k+k_1}{m_2\omega_1^2}, \quad \varepsilon\bar{\delta}=\frac{m_0 r^2}{J} \tag{2}$$

$$\varepsilon\bar{\alpha}=\frac{M_0}{J\omega_1^2}=\alpha, \quad \varepsilon\bar{\beta}=\frac{M_1+C_1}{J\omega_1}$$

cu care sistemul (1) devine

$$\begin{aligned} &y_1''+y_1-y_1=\mu\,(\varphi'^2\sin\varphi-\varphi''\cos\varphi)\\ &y_2''+2Dy_2'+\gamma_2^2y_2-\gamma_1^2y_1=0\\ &\varphi''=\varepsilon\bar{\delta}y_1''\cos\varphi+\varepsilon\bar{\alpha}-\varepsilon\bar{\beta}\varphi'. \end{aligned} \tag{3}$$

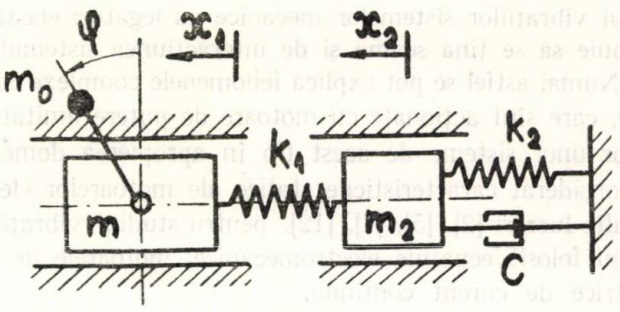


Fig. 1.

Mișcările staționare ale sistemului autonom (3) și stabilitatea lor, se studiază comod dacă în locul variabilei τ se consideră variabila φ. În acest scop se notează

$$\Omega=\varphi' \tag{3}$$

cu care sistemul (3) se transformă în:

$$\begin{aligned} &\Omega^2\frac{d^2y_1}{d\varphi^2}+\Omega\frac{d\Omega}{d\varphi}\frac{dy_1}{d\varphi}+y_1-y_2=\mu\left(\Omega^2\sin\varphi-\Omega\frac{d\Omega}{d\varphi}\cos\varphi\right)\\ &\Omega^2\frac{d^2y_2}{d\varphi^2}+\Omega\frac{d\Omega}{d\varphi}\frac{dy_2}{d\varphi}+2D\Omega\frac{dy_2}{d\varphi}+\gamma_2^2y_2-\gamma_1^2y_1=0\\ &\Omega\frac{d\Omega}{d\varphi}=\varepsilon\bar{\delta}\left(\Omega^2\frac{d^2y_1}{d\varphi^2}+\Omega\frac{d\Omega}{d\varphi}\frac{dy_1}{d\varphi}\right)\cos\varphi+\varepsilon\bar{\alpha}-\varepsilon\bar{\beta}\Omega. \end{aligned} \tag{5}$$

Se caută regimuri staţionare periodice, apropiate de o valoare medie constantă a vitezei unghiulare. Studiul acestor regimuri în cazul nerezonanţei se efectuează ţinînd seama de existenţa parametrului mic ε în ultima din ecuaţiile sistemului (5). Acest parametru s-a introdus ţinînd seama că la vibratoarele folosite pentru înfigerea elementelor în sol $m_0 r/J \ll 1$ şi că în regim staţionar cuplul motorului diferă puţin de cuplu rezistent. Existenţa vitezei unghiulare medii a sistemului (5) se remarcă făcînd $\varepsilon \to 0$. Limitînd studiul regimurilor staţionare la primele două aproximaţii, se consideră dezvoltările :

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(\varphi, \varepsilon) = y_{10}(\varphi) + \varepsilon y_{11}(\varphi) + 0(\varepsilon^2) \\ y_2 &= y_2(\varphi, \varepsilon) = y_{20}(\varphi) + \varepsilon y_{21}(\varphi) + 0(\varepsilon^2) \\ \Omega &= \Omega(\varphi, \varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon \Omega_1(\varphi) + 0(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{6}$$

Pentru aproximaţia de ordinul zero se găseşte $\Omega = \omega_0 > 0$, iar pentru determinarea funcţiilor y_{10} şi y_{20}, rezultă sistemul :

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \frac{d^2 y_{20}}{d\varphi^2} + y_{10} - y_{20} &= \mu \omega_0^2 \sin \varphi \\ \omega_0^2 \frac{d^2 y_{20}}{d\varphi^2} + 2D\omega_0 \frac{dy_{20}}{d\varphi} + y_2^2 y_{20} - \gamma_1^2 y_{20} &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

de unde rezultă soluţiile particulare

$$\begin{aligned} y_{10} &= A_1 \sin \varphi + B_1 \cos \varphi \\ y_{20} &= A_2 \sin \varphi + B_2 \cos \varphi \end{aligned} \tag{8}$$

unde :

$$\begin{aligned} &A_1 = \mu\omega_0^2 \Delta^{-1} \{[(\gamma_2^2 - \omega_0^2)^2 + 4D^2\omega_0^2] - \gamma_1^2 (1 - \omega_0^2)(\gamma_2^2 - \omega_0^2)\}, \quad B_1 = -2D\Delta^{-1}\omega_0^3 \gamma_1^2 \mu \\ &A_2 = \mu\omega_0^2 \Delta^{-1} \gamma_1^2 [(1 - \omega_0^2)(\gamma^2 - \omega_0^2) - \gamma_1^2], \quad B_2 = -2\mu\omega_0^3 \Delta^{-1} D (1 - \omega_0^2) \gamma_0^2 \\ &\Delta = (1 - \omega_0^2)^2 [(\gamma_2^2 - \omega_0^2) + 4D^2\omega_0^2] - 2\gamma_1^2 (1 - \omega_0^2)(\gamma_2^2 - \omega_0^2) + \gamma_1^4. \end{aligned} \tag{9}$$

Pentru determinarea elementelor corespunzătoare aproximaţiei de ordinul întîi, se va considera ultima din ecuaţiile sistemului (5), care conduce la

$$\omega_0 \frac{d\Omega_1}{d\varphi} = \bar{\delta}\omega_0^2 \frac{d^2 y_{10}}{d\varphi^2} \cos \varphi + \bar{\alpha} - \bar{\beta}\omega_0. \tag{10}$$

Deoarece se urmăresc regimuri staţionare periodice, ecuaţia (10) nu trebuie să conţină termeni constanţi în raport cu φ, deci trebuie să fie îndeplinită condiţia

$$-\frac{\delta\omega_0^2}{2} B_1(\omega_0) + \alpha - \beta\omega_0 = 0 \tag{11}$$

unde s-au folosit notaţiile de forma $\delta = \varepsilon\bar{\delta}$.

Din ecuația (11) se determină valorile vitezei unghiulare medii ω_0, pentru care se obțin regimuri staționare periodice. Cu ω_0 determinat din (11) se găsește

$$\Omega_1 = \frac{\delta\omega_0}{4}(B_1 \sin 2\varphi - A_1 \cos 2\varphi). \tag{12}$$

Constanta de integrare din soluția (12) nu s-a considerat fiind posibilă să se anuleze în aproximația de ordinul doi. Cunoscînd pe Ω_1 se pot determina funcțiile y_{11} și y_{21}. Din ecuația (11), ω_0 poate fi determinat aproximativ și pe cale grafică, intersectînd curba.

$$\Gamma(\omega_0) = \frac{\delta\omega_0^2}{2} B_1(\omega_0) \tag{13}$$

cu dreapta

$$Q(\omega_0) = \alpha - \beta\omega_0 \tag{14}$$

Abscisele punctelor de intersecție reprezintă rădăcinile ecuației (11).

Ținînd seama de natura fizică a sistemului, pentru regimurile staționare periodice convin numai rădăcinile reale pozitive. În fig. 2, s-a reprezentat o dreaptă $Q(\omega_0)$ și o curbă $\Gamma(\omega_0)$, [5]. Rezultă că sînt posibile cel mult cinci regimuri staționare periodice corespunzătoare rădăcinilor ω_{0i} ($i=1,2,\ldots 5$) notate pe figură ($\omega_{01} < \omega_{02} < \ldots\ldots < \omega_{05}$). Pentru agregate de acest tip s-a arătat

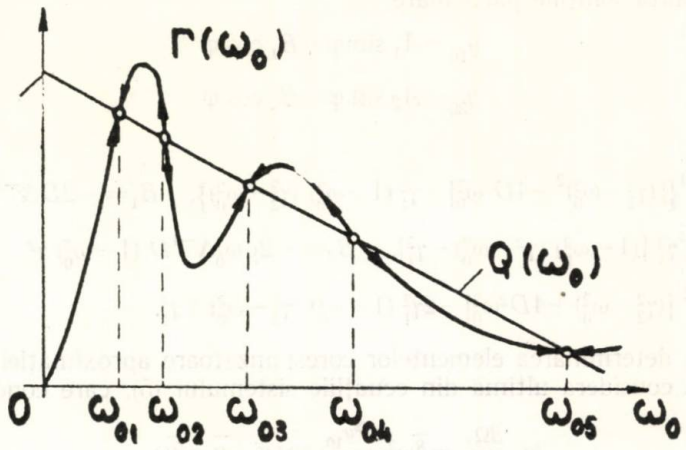


Fig. 2.

că regimurile staționare periodice, obținute pentru rădăcinile reale pozitive ale ecuației (11), nu se pot toate menține în sistemul concret, deoarece nu sînt toate stabile. Din această cauză este necesar să se studieze și stabilitatea regimurilor staționare.

Pentru studiul stabilității se consideră determinate soluțiile staționare y_1, y_2 și Ω ale sistemului (5). Folosind acest sistem de ecuații pentru stu-

diul stabilităţii, în locul soluţiilor staţionare amintite se consideră soluţiile perturbate.

$$y_1+u, \quad y_2+v, \quad \Omega+w \tag{15}$$

unde u, v şi w sînt perturbaţii mici. Înlocuind în sistemul (5) şi eliminînd termenii corespunzători regimurilor staţionare se obţine următorul sistem liniarizat în perturbaţii.

$$\begin{aligned}
&\Omega^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}+2\Omega W\frac{d^2y_1}{d\varphi^2}+u-v+\Omega\frac{d\Omega}{d\varphi}\frac{du}{d\varphi}+\frac{dy_1}{d\varphi}\frac{d(\Omega W)}{d\varphi}= \\
&\qquad=\mu\left[2\Omega W\sin\varphi-\frac{d(\Omega W)}{d\varphi}\cos\varphi\right] \\
&\Omega^2\frac{d^2v}{d\varphi^2}+2\left(\Omega W\frac{d^2y_2}{d\varphi}+D\Omega\frac{dv}{d\varphi}+DW\frac{dy_2}{d\varphi}+\gamma_2^2v+\gamma_1^2u+\Omega\frac{d\Omega}{d\varphi}\frac{dv}{d\varphi}+\right. \\
&\qquad\left.+\frac{dy_2}{d\varphi}\frac{d(\Omega W)}{d\varphi}\right)=0 \\
&\Omega\frac{dW}{d\varphi}+W\frac{d\Omega}{d\varphi}=\bar{\omega\delta}\left[\Omega^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}+2\Omega W\frac{d^2y_1}{d\varphi^2}+\Omega\frac{d\Omega}{d\varphi}\frac{du}{d\varphi}+\right. \\
&\qquad\left.+\frac{dy_1}{d\varphi}\frac{d(\Omega W)}{d\varphi}\right]\cos\varphi-\bar{\varepsilon\beta}W.
\end{aligned} \tag{16}$$

Considerînd soluţiile staţionare corespunzătoare aproximaţiei de ordinul zero, se admite în (16) că $\varepsilon\to 0$, deci $\Omega=\omega_0$ şi rezultă

$$\frac{dW}{d\varphi}=0, \quad W=W_0=\text{constant}. \tag{17}$$

Căutînd pentru sistemul (16) soluţii exponenţiale unul din exponenţii caracteristici, rezultă nul ($\lambda_0=0$), iar restul exponenţilor caracteristici, notaţi cu λ se determină rezolvînd ecuaţia

$$\begin{vmatrix} 1+(\omega_0\lambda)^2 & -1 \\ -\gamma_1^2 & \gamma_2^2+2D(\omega_0\lambda)+(\omega_0\lambda)^2 \end{vmatrix}=0. \tag{18}$$

Cum mărimile γ_1, γ_2, D şi ω_0 sînt pozitive se ştie că părţile reale ale rădăcinilor ecuaţiei (18) sînt negative, deci pentru $\varepsilon=0$ rezultă regimuri staţionare stabile. Pentru studiul stabilităţii regimurilor staţionare trebuie considerat cazul cînd $\varepsilon\ll 1$. Exponenţii caracteristici vor fi apropiaţi de cei determinaţi pentru $\varepsilon\to 0$. În acest caz ecuaţiile (16) reprezintă un sistem liniar cu coeficienţi periodici şi deci admite soluţii de forma

$$u=e^{\lambda\varphi}P(\varphi), \quad v=e^{\lambda\varphi}R(\varphi), \quad W=e^{\lambda\varphi}Q(\varphi) \tag{19}$$

unde P, R, şi Q sînt funcţii periodice de φ cu perioada 2π.

Soluțiile (19) se determină aproximativ folosind dezvoltările:

$$\begin{aligned} \lambda &= \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \dots \\ P(\varphi) &= P_0(\varphi) + \varepsilon P_1(\varphi) + \dots \\ R(\varphi) &= R_0(\varphi) + \varepsilon R_1(\varphi) + \dots \\ Q(\varphi) &= Q_0(\varphi) + \varepsilon Q_1(\varphi) + \dots \end{aligned} \tag{20}$$

Pentru aproximația de ordinul zero se găsește $Q_0 = 1$, iar P_0 și R_0 se determină din

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \frac{d^2P_0}{d\varphi^2} + P_0 - R_0 &= 2\omega_0\left(\mu \sin\varphi - \frac{d^2y_{10}}{d\varphi^2}\right) \\ \omega_0^2 \frac{d^2R_0}{d\varphi^2} + 2D\omega_0 \frac{dR_0}{d\varphi} + \gamma_2^2 R_0 - \gamma_1^2 P_0 &= -2\left(\omega_0 \frac{d^2y_{10}}{d\varphi^2} + D\frac{dy_{10}}{d\varphi}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Ultima din ecuațiile sistemului (16), pentru aproximația de ordinul întîi, conduce la

$$\omega_0 \frac{dQ_1}{d\varphi} + \frac{d\Omega_1}{d\varphi} + \omega_0\lambda_1 = \bar{\delta}\omega_0^2 \frac{d^2P_0}{d\varphi^2}\cos\varphi + 2\bar{\delta}\omega_0 \frac{d^2y_{10}}{d\varphi^2}\cos\varphi - \bar{\beta}. \tag{22}$$

Deoarece se caută soluții periodice cu perioada minimă 2π, din (22) rezultă că trebuie să fie îndeplinită condiția

$$\omega_0\lambda_1 + \bar{\beta} = \bar{\delta}\omega_0\left(\frac{d^2S_0}{d\varphi^2}\cos\varphi\right)_{2\pi} \tag{23}$$

unde

$$S_0 = \omega_0 P_0 + 2y_{10} \tag{24}$$

iar $(Z)_{2\pi}$, reprezintă valoarea medie pe perioada 2π, a funcției $Z(\varphi)$.

Din ecuațiile (21) se găsesc soluțiile particulare

$$\begin{aligned} P_0 &= C_1 \sin\varphi + E_1\cos\varphi \\ R_0 &= C_2 \sin\varphi + E_2\cos\varphi \end{aligned} \tag{25}$$

și înlocuind în condiția (23), după înmulțirea cu ε, această condiție devine

$$\varepsilon\lambda_1 + \frac{d\Gamma}{d\omega_0} - \frac{dQ}{d\omega_0} = 0. \tag{26}$$

Pentru ca un regim staționar să fie stabil, trebuie să fie îndeplinită condiția

$$\frac{d\Gamma}{d\omega_0} > \frac{dQ}{d\omega_0} \tag{27}$$

pentru care partea reală a exponentului caracteristic λ_1 este negativă. Deci condiția (27) este condiția de stabilitate a regimurilor staționare, corespunzătoare uneia din rădăcinile simple ale ecuației (11).

În fig. 3, s-a reprezentat o curbă $\frac{d\Gamma}{d\omega_0}$ și o dreaptă $\frac{dQ}{d\omega_0}$. Cu S s-au notat domeniile de stabilitate și cu I domeniile de innstabilitate. Pentru sistemul electromecanic studiat rezultă următoarele concluzii:

În sistem sînt posibile regimuri staționare peroidice. Aceste regimuri sînt caracterizate de rădăcinile reale și pozitive ale ecuației (11).

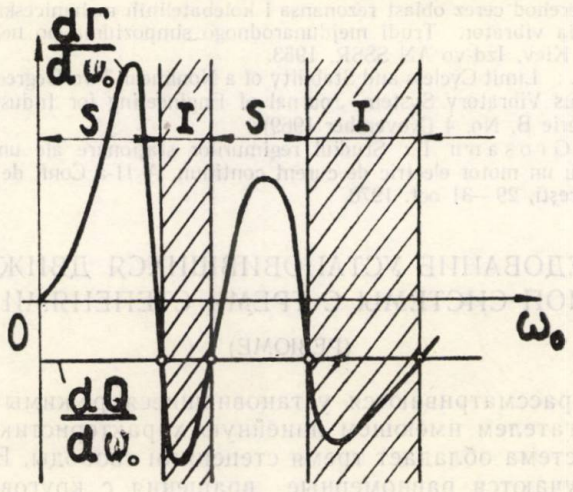


Fig. 3.

Sînt posibile cel mult cinci regimuri staționare periodice corespunzătoare rădăcinilor simple ale ecuației (11) $\omega_{01}<\omega_{02}<\ldots<\omega_{05}$. Aceste regimuri staționare periodice nu sînt toate stabile.

Amplitudinile maxime și neuniformitățile cele mai pronunțate se obțin pentru regimuri staționare apropiate de zonele de rezonanță ale sistemului.

Din analiza stabilității rezultă că regimurile staționare corespunzătoare rădăcinilor simple ω_{01}, ω_{03}, ω_{05}, ale ecuației (11), sînt stabile, iar regimurile corespunzătoare rădăcinilor ω_{02} și ω_{03} sînt instabile.

Cu cît valorile parametrului β sînt mai mici, cu atît domeniile de instabilitate, notate cu I, sînt mai mari.

BIBLIOGRAFIE

1. Chetayev N.: The Stability of Motion, s. 51 Oxford, London, New York, Paris, 1961.
2. Christ K.: An- und Auslauf eines gedampften, unwzuchterregten Schwingers. VDI—Berichte, Nr. 135, 1969.
3. Dimentberg M. F., Frolov K, V.: Effect Sommerfeld v sisteme so sluciaino iz meniaiușceisia sobstvennoi ciastoto. Dok. Dok. AN SSSR, 1966, 1971, Nr. 6
4. Goloskokov E. G., Filippov A. P.: Nestaționarînie kolebaniia mehaniceskih sistem. „Naukova Dumka", Kiev, 1966.
5. Groșanu I.: Contribuții privind studiul mișcărilor staționare și nestaționare ale sistemelor mecanice excitate inerțial, acționate cu motoare electrice. Teză de doctorat. I.P. Timișoara. 1970,

6. Kononenko V. O.: Nekatorîe sistemî s ogranicennîm vozbujdeniem. Izd-vo „Nauka" Moskva 1964.
7. Linvovici A. L.: Mehaniceskie kolebaniia vozbujdaemîe elekrtodvigatelem. Vesnik Leningradskogo Universiteta, Nr. 7 Vîp. 2, 1968.
8. Morrison, J. A. Asymptotic Analisis of a Nonlinear Autonomous Vibratory System. The Bell System Tehnical Journal 1970.
9. Panovko I. ,G., Gubanova I. I.: Ustoicivosti i kolebaniia uprugh sistem. Izd-vo „Nauka" Moskva 1976.
10. Pust L.: Perehod cerez oblast rezonansa i kolebatelinîh mehaniceskih sistem s ucetom vlianiia vibrator. Trudî mejdunarodnogo simpoziuma po neiineinîm kolebanii. T. 3, Kiev, Izd-vo AN SSSR, 1963.
11. Senator M.: Limit Cycless and Stability of a Nonlinear Two-Degree of Freedom Autonomous Vibratory System. Journal of Engineering for Industry, Trans ASME, 91, Serie B, No. 4 (November 1969).
12. Silaş Gh., Groşanu I.: Studiul regimurilor staţionare ale unui vibrator acţionat cu un motor electric de curent continuu. A II-a Conf. de Mecanică tehnică, Bucureşti, 29—31 oct. 1970.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

(РЕЗЮМЕ)

В работе рассматриваются установившиеся режимы инерциальной системы с двигателем имеющем линейную характеристику. Полученная автономная система обладает тремя степенями свободы. В нулевом приближении получаются равномерные вращения с круговой скоростью якоря ω_0. Значение скорости ω_0. Определяется по алгебраическому уравнению существования установившихся периодических режимов.

Указывается возможность наличия не более пяти установившихся периодических движений соответствующих значением $\omega_1 < \omega_{02} < \ldots \omega_{05}$. Исследование установившихся режимов методом возмущений показывает, что только установившиеся режимы соответствующие значениям ω_{01}, ω_{03}, ω_{05} являются устойчивыми.

THE STUDY OF THE STEADY MOVEMENTS OF AN AUTONOMOUS SYSTEM WITH THREE DEGREES OF FREEDOM.

(Summary)

The paper deals with the stady states of an inertial system driven by a motor having a liniar characteristic. The obtained autonomous system has three degrees of freedom. It is shown that in the approximation of zero order, uniform rotations with the angular speed ω_0 of the rotor of the driving motor are obtained. The speed value ω_0 is determined from an algebraic equation necessary to the existence of periodical steady states.

There are possible no more than five periodical steady states corresponding to $\omega_{01} < \omega_{02}, \ldots < \omega_{05}$ values. The study of the stability of this states, done with the perturbations methods, shows that only the steady states corresponding to ω_{01}, ω_{03}, ω_{05} values are steady.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al I.P.T.
Seria Matematică-Fizică-Mecanică
teoretică şi aplicată. Tomul 16(30),
Fasc. 2/1971.

EXTINDEREA PRINCIPIULUI VARIATIONAL AL LUI HAMILTON PENTRU SISTEME MATERIALE PERCUTATE.

DE

E. TOCACI

După cum se ştie, un sistem material acţionat de forţe care derivă dintr-o funcţie de potenţial se va mişca astfel încît integrala de acţiune

$$I=\int_{t_e}^{t_1} \mathfrak{L}\,(q_1,\ q_2,\ \ldots\ q_h,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \ldots,\ \dot{q}_h,\ t)\,dt. \tag{1}$$

considerată între două poziţii fixe, care să fie conţinute de mulţimea tuturor traectoriilor virtuale (în care se include şi traiectoria reală) şi care să corespundă aceloraşi momente (t_0 şi t_1) în cazul oricărei mişcări virtuale, (precum şi pentru cea reală) să prezinte un extremum.

q_i ($i=1, 2, \ldots, h$) sînt coordonatele generalizate, $\dot{q}_i$ ($i=1, 2, \ldots h$) sînt vitezele generalizate, iar t este timpul.

Acesta este principiul variaţional al lui Hamilton, în care

$$\mathfrak{L}=T+U \tag{2}$$

T fiind energia cinetică a sistemului material studiat, iar $U=U\,(q_1, q_2, \ldots q_h, t)$ funcţia de forţe.

Una din condiţiile restrictive care limitează generalitatea principiului constă în faptul că funcţia $\mathfrak{L}$ trebuie să fie cel puţin de două ori derivabilă în raport cu variabilele de care depinde,

Adică trebuie să aparţie cel puţin clasei C^2.

$$\mathfrak{L}\in C^P;\quad p\geqslant 2. \tag{3}$$

Este evident că această restricţie face inutilizabil principiul în cazul în care acţionează nu numai forţe de variaţie continuă, ci şi forţe percutante.

Lucrarea îşi propune extinderea principiului variaţional al lui Hamilton pentru situaţia în care forţelor continui li se asociază acţiunea unor percuţii.

Continuîndu-se seria altor lucrări cu o ordine de idei similară, generalizarea se bazează pe considerarea variaţiilor discontinui, drept cazuri limită ale

celor continui, ceea ce implică introducerea distribuției lui Dirac și a funcției lui Heaviside.

În interesul clarității expunerii, trebuie în prealabil arătat că o percuție oarecare, $\overline{P}$, înseamnă aplicarea unei forțe percutante.

$$\overline{F}_P=\overline{P}\delta(t-\tau), \tag{4}$$

în a cărei expresie $\delta(t-\tau)$ este distribuția lui Dirac, concentrată în momentul $t=\tau$, în care are loc șocul, presupus instantaneu, precum și modul în care percuția poate fi obținută ca limita unei acțiuni continui.

Fie deci forța:

$$\overline{F}_{P\lambda}=\frac{\overline{P}}{\lambda^2\left[e^{\frac{t-\tau}{\lambda^2}}+e^{-\frac{t-\tau}{\lambda^2}}+2\right]}, \tag{5}$$

de variație continuă și indefinit derivabilă în raport cu timpul t, și în care $\overline{P}$ este un vector constant, τ un scalar constant, iar λ un parametru. Se va vedea că, într-un caz limită această forță continuă devine percutantă.

O asemenea forță provoacă sistemului material căruia îi este aplicată, o variație de impuls.

$$\Delta\overline{C}_\lambda=m\overline{v}-m\overline{v}_0=\int_{t_0}^{t}\frac{\overline{P}}{\lambda^2\left[e^{\frac{t-\tau}{\lambda}}+e^{-\frac{t-\tau}{\lambda^2}}+2\right]}dt. \tag{6}$$

În (6) m este masa totală a sistemului, t_0 și t momentele între care se consideră variația de impuls, iar $\overline{v}$ și $\overline{v}_0$, vitezele centrului de inerție la aceste momente.

Se verifică imediat că:

$$\left|\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\lambda^2\left[e^{\frac{t-\tau}{\lambda^2}}+e^{-\frac{t-\tau}{\lambda^2}}+2\right]}\right|<1 \text{ pentru orice } t_0,\ t \text{ și } \lambda \tag{7}$$

și

$$\lim_{\lambda=0}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\lambda^2\left[e^{\frac{t-\tau}{\lambda^2}}+e^{-\frac{t-\tau}{\lambda^2}}+2\right]}=\begin{cases}1 \text{ pentru } \tau\in(t_0,\ t_1)\\ 0 \text{ pentru } \tau\notin(t_0,\ t_1),\end{cases} \tag{8}$$

demonstrîndu-se astfel egalitatea:

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda^2\left[e^{\frac{t-\tau}{\lambda^2}}+e^{-\frac{t-\tau}{\lambda^2}}+2\right]}=\delta(t-\tau) \tag{9}$$

$\delta(t-\tau)$ fiind distribuția lui Dirac, egalitate care dacă se ia $t_0<\tau$, ceea ce este întotdeanua posibil fără a se afecta generalitatea tratării, antrenează imediat relația:

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\lambda^2\left[e^{\frac{t-\tau}{\lambda^2}}+e^{-\frac{t-\tau}{\lambda^2}}+2\right]}=H(t-\tau), \tag{10}$$

unde:

$$H(t-\tau)=\begin{cases}1 & \text{pentru } t>\tau\\ 0 & \text{pentru } t<\tau.\end{cases} \tag{11}$$

este funcţia lui Heaviside, cunoscut fiind că:

$$\frac{d}{dt}H(t-\tau)=\delta(t-\tau) \tag{12}$$

şi

$$\int_{t_0}^{t}\delta(t-\tau)\,dt=H(t-\tau). \tag{12'}$$

operatorii de derivare şi integrare fiind consideraţi în sensul teoriei distribuţiilor.

Pe de altă parte, asociind (6) şi (10) se ajunge la:

$$\lim_{\lambda\to 0}\Delta\overline{C}_\lambda=\Delta\overline{C}=\overline{P}H(t-\tau), \tag{13}$$

iar (5) şi (9) conduc la

$$\lim_{\lambda\to 0}\overline{F}_{P\lambda}=\overline{F}_P=\overline{P}\delta(t-\tau) \tag{14}$$

Este evident că, o percuţie $\overline{P}$ dînd o creştere a impulsului sistemului percutant $\Delta\overline{C}_1=\overline{P}$, pentru un moment $t>\tau$, în virtutea relaţiilor (11) şi (13) se obţin:

$$\Delta\overline{C}=\Delta\overline{C}_1, \tag{15}$$

adică se ajunge la concluzia că funcţia (13) este chiar variaţia impulsului în cazul unei percuţii $\overline{P}$.

Derivînd această variaţie, se va obţine forţa percutantă:

$$\frac{d}{dt}(\Delta\overline{C})=\frac{d}{dt}[\overline{P}H(t-\tau)]=\overline{P}\delta(t-\tau), \tag{16}$$

care, potrivit cu (12) şi (14), este chiar $\overline{F}_P$, aplicată la momentul $t=\tau$.

Este de la sine înţeles că derivarea din (16) trebuie considerată în sensul teoriei distribuţiilor.

Din relaţiile (5), (6), (9), (10), (13), (14), (15) şi (16), precum şi din toate consideraţiunile de mai sus se poate conclude valabilitatea afirmaţiei referitoare la expresia forţei percutante $\overline{F}_P=\overline{P}\delta(t-\tau)$, dată de (4) precum şi la obţinerea fenomenului de percuţie ca un caz limită al unei acţiuni continui.

De remarcat că în locul funcţiei

$$y=\frac{1}{\lambda^2\left[e^{\frac{t-\tau}{\lambda^2}}+e^{-\frac{t-\tau}{\lambda^2}}+2\right]} \tag{17}$$

utilizată pentru obţinerea şocului ca un caz limită de variaţie continuă, se poate utiliza oricare alta, $y=f(t,\lambda)$, cu condiţia ca

$$\lim_{\lambda\to 0}f(t,\lambda)=\delta(t-\tau). \tag{18}$$

De asemenea, ţinîndu-se seama de principiul suprapunerii efectelor, se poate afirma că mai multe percuţii aplicate unui sistem material, pot primi reprezentarea matematică

$$\overline{F}_P = \sum_{j=1}^{\gamma} \overline{P}_j f_j(t, \lambda), \tag{19}$$

în care $\overline{P}_j$, sînt percuţiile, în număr de γ, aplicate sistemului la momentele τ_j $(j=1, 2, \ldots,)$ iar $\overline{F}_P$ este forţa percutantă în acest caz mai general, forţă ce se poate obţine (conform raţionamenetelor anterioare) printr-un proces de limită :

$$\overline{F}_P = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{j=0}^{\gamma} \overline{P}_j f_j(t, \lambda), \tag{20}$$

unde $f_j(t, \lambda)$ sînt funcţii continui, şi care îndeplinesc condiţiile necesare pentru ca

$$\lim_{\lambda \to 0} f_j(t, \lambda) = \delta(t, \tau_j). \tag{21}$$

De exemplu :

$$f_j(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda^2 \left[e^{\frac{t-\tau_j}{\lambda^2}} + e^{-\frac{t-\tau_j}{\lambda^2}} + 2\right]}. \tag{22}$$

O dată această realitate stabilită, fie un sistem material, supus unor legături olonome (reonome sau scleronome), avînd h grade de libertate, exprimate prin coordonatele generalizate q_i $(i=1, 2, \ldots, h)$. Fie M_c $(s=1, 2, \ldots, n)$ punctele aparţinînd sistemului, în care se aplică forţele exterioare $\overline{F}_s$, şi care pot fi supuse, la momentele τ_{sj}, percuţiilor $\overline{P}_{sj}$, în număr de γ_s.

Discontinuităţile în variaţia vitezelor, şi o dată cu aceasta, în variaţia energiei cinetice (pentru a nu considera decît acest argument) fac imposibilă utilizarea principiului variaţional dat de Hamilton, dacă integrala (1) este considerată în sens clasic.

Extinderea domeniului de aplicabilitate a principiului variaţional al lui Hamilton este însă posibilă, astfel încît el să cuprindă şi mişcările sistemelor percutante.

Suma tuturor forţelor (percutante şi nepercutante) care acţionează punctul M_s $(s=1, 2, \ldots, n)$ aparţinînd sistemului, va fi conform cu (19)

$$\overline{\Phi}_s = \overline{F}_s + \sum_{j=1}^{\gamma_s} \overline{P}_{sj}\, \delta(t - \tau_{sj}). \tag{23}$$

Sub acţiunea forţelor $\overline{\Phi}_s$ sistemul material va avea o mişcare descrisă de funcţiile $q_i = q_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, h)$ care vor fi continui, dar care vor admite derivate în sens clasic (în raport cu timpul) la momentele $t=\tau_{sj}$, $(s=1, 2, \ldots, n,$ $j=1, 2, \ldots \gamma_s)$ datorită percuţiilor aplicate. Adică,

$$q_i(t) \in C^{\circ} \quad (i=1, 2, \ldots, h). \tag{24}$$

Vitezele generalizate $\dot{q}_i(t)$; $(i=1, 2, \ldots, h)$ avînd discontinuități la momentele τ_{sj}, energia cinetică T a întregului sistem va fi, la fel, discontinuă pentru $t=\tau_{sj}$. În consecință și funcția $\mathfrak{L}$ din (2) va prezenta aceleași discontinuități. În plus $\mathfrak{L}$ conține funcția de forțe U, care în cazul șocurilor se modifică, după cum se va vedea, astfel încît (1) nu mai are nici un sens clasic.

Însă, mișcarea percutantă discontinuă poate fi obținută ca limită a unei mișcări continui.

Fie, pentru aceasta, același sistem material acționat de forțele continui,

$$\bar{\Phi}_{s\lambda}=\bar{F}_s+\sum_{j=1}^{\nu_s}\bar{P}_{sj}f_{sj}(t, \lambda) \tag{25}$$

unde $\bar{F}_s$ sînt identice cu cele din (23), la fel ca vectorii $\bar{P}_{sj}$ (care sînt deci constanți) iar funcțiile $f_{sj}(t, \lambda)$ sînt continui, și îndeplinesc condițiile (7) și (8) necesare pentru ca

$$\lim_{\lambda\to 0} f_{sj}(t, \lambda)=\delta(t-\tau_{sj}), \tag{26}$$

$\delta(t-\tau_{sj})$ fiind distribuția lui Dirac, iar λ, evident, un parametru.

Se poate lua, de exemplu

$$f_{sj}(t, \lambda)=\frac{1}{\lambda^2\left[e^{\frac{t-\tau_j}{\lambda^2}}+e^{-\frac{t-\tau_j}{\lambda^2}}+2\right]}. \tag{27}$$

Sub acțiunea forțelor $\bar{\Phi}_{s\lambda}$, datorită continuității acestora, sistemul va avea o mișcare continuă, coordonatele generalizate, vor îndeplini condiția

$$q_{i\lambda}(t)\in C^{P_1}, \quad (i=1, 2, \ldots, h) \tag{28}$$

cu P_1 suficient de mare pentru ca energia cinetică T_λ să admită cel puțin două derivate, în raport cu oricare dintre variabilele de care depinde. Deci luînd $p\geqslant 2$,

$$T_\lambda(q_{1\lambda}, q_{2\lambda}, \ldots, q_{h\lambda}, \dot{q}_{1\lambda}, \dot{q}_{2\lambda}, \ldots, \dot{q}_{h\lambda}, t)\in C^P. \tag{29}$$

Indicele λ, cu care au fost afectate coordonatele și vitezele generalizate, precum și energia cinetică, indică dependența acestora de parametrul λ, dependență ce decurge din expresia (25) a forțelor

Se poate deci scrie că :

$$q_{i\lambda}=q_{i\lambda}(t, \lambda) ; \quad \dot{q}_{i\lambda}=\dot{q}_{i\lambda}(t, \lambda), \tag{30}$$

deși nu sînt cunoscute încă funcțiile (30), și că ele vor fi astfel încît relațiile (28) și (29) să fie satisfăcute.

De asemenea și vectorii de poziție ai punctelor M_s vor depinde, ca o consecință imediată, și de parametrul λ (împreună cu toate deviratele lor)

$$\bar{r}_{s\lambda}=\bar{r}_{s\lambda}(t, \lambda), \tag{31}$$

ceea ce decurge imediat din

$$\bar{r}_{s\lambda}=\bar{r}_{s\lambda}(q_{1\lambda}, q_{2\lambda}, \ldots, q, t) \tag{32}$$

asociată cu (30).

În ceea ce privește funcția de forțe W_λ, aceasta se poate stabili cu ușurință.

Într-adevăr, dacă forțele generalizate

$$N_{i\lambda}=\sum_{s=1}^{n}\bar{\Phi}_{s\lambda}\frac{\partial\bar{r}_{s\lambda}}{\partial q_{i\lambda}}; \quad (i=1, 2, \ldots, h) \tag{33}$$

derivă dintr-un potențial, adică dacă:

$$N_{i\lambda}=\frac{\partial W_\lambda}{\partial q_{i\lambda}}; \quad (i=1, 2, \ldots, h) \tag{34}$$

unde:

$$W_\lambda=W_\lambda(t, q_{1\lambda}, q_{2\lambda}, \ldots, q_{h\lambda}), \tag{35}$$

înseamnă că

$$W_\lambda=U_\lambda+U_{P\lambda} \tag{36}$$

datorită exopresiei (25) a lui $\bar{\Phi}_{s\lambda}$.

Bineînțeles că din (35) se desprinde că:

$$U_\lambda=U_\lambda(q_{1\lambda}, q_{2\lambda}, \ldots, q_{h\lambda}, t) \tag{37}$$

și

$$U_{P\lambda}=U_{P\lambda}(q_{1\lambda}, q_{2\lambda}, \ldots, q_{h\lambda}, t). \tag{37'}$$

Funcțiile U_λ și $U_{P\lambda}$ fiind astfel încît:

$$Q_{i\lambda}=\sum_{s=1}^{n}\bar{F}_s\frac{\partial\bar{r}_{s\lambda}}{\partial q_{i\lambda}}=\frac{\partial U_\lambda}{\partial q_{i\lambda}}; \quad (i=1, 2, \ldots, h) \tag{38}$$

și

$$\Gamma_{i\lambda}=\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{\gamma_s}\bar{P}_{sj}\frac{\partial\bar{r}_{s\lambda}}{\partial q_{i\lambda}}f_{sj}(t, \lambda)=\frac{\partial U_{P\lambda}}{\partial q_{i\lambda}}; \quad (i=1, 2, \ldots, h) \tag{39}$$

U_λ depinde de natura forțelor $\bar{F}_s$.

În ceea ce privește $U_{p\lambda}$ aceasta se vede că este de forma:

$$U_{P\lambda}=\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{\gamma_s}P_{sj}\bar{r}_{s\lambda}f_{sj}(t, \lambda), \tag{40}$$

care verifică imediat pe (39), și care, ținînd seama de structura funcțiilor $f_{sj}(t, \lambda)$ este continuă și cel puțin de două ori derivabilă.

În felul acesta, funcția:

$$\mathfrak{L}_\lambda=T_\lambda+W_\lambda \tag{41}$$

sau, după (36) și (40)

$$\mathfrak{L}_\lambda = T_\lambda + U_\lambda + \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{\gamma_s} \bar{P}_{sj} \bar{r}_{s\lambda} f_{sj}(t, \lambda) \tag{42}$$

este continuă și cel puțin de două ori derivabilă, în raport cu toate variabilele de care depinde.

Acestei mișcări continui i se poate aplica principiul variațional al lui Hamilton deci mișcarea reală corespunde unui exrtemum al funcționalei

$$I_\lambda = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}(q_{1\lambda}, q_{\lambda 2}, \ldots, q_{h\lambda}, \dot{q}_{\lambda 1}, \dot{q}_{\lambda 2}, \ldots, \dot{q}_{h\lambda}, t)\, dt, \tag{42}$$

care, conform condițiilor principiului, și regulilor bine cunoscute ale calculului variațiilor, are loc atunci cînd

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}_\lambda}{\partial \dot{q}_{i\lambda}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}_\gamma}{\partial q_{i\lambda}} = 0. \tag{43}$$

Acest sistem de ecuații diferențiale, conduce, prin integrarea sa, la cunoașterea legii de mișcare pentru cazul în care sistemul material este acționat de forțele continui $\bar{\Phi}_{s\lambda}$.

Dar, după (23), (25) și (26)

$$\lim_{\lambda \to 0} \bar{\Phi}_{s\lambda} = \bar{\Phi}_s, \tag{44}$$

ceea ce înseamnă că, în cazul limită ($\lambda \to 0$) sistemul de forțe continui $\bar{\Phi}_{s\lambda}$ se transformă în sistemul de forțe exprimate prin forma (23), la care participă atît forțe continui (F_s) cît și forțe percutante $\left[\sum_{j=1}^{\gamma_s} \bar{P}\, \delta(t - \tau_{sj})\right]$.

Fie limitele

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda \to 0} q_{i\lambda}(t, \lambda) = q_i(t) \\ &\lim_{\lambda \to 0} \dot{q}_{i\lambda}(t, \lambda) = \dot{q}_i(t) \\ &\lim_{\lambda \to 0} \ddot{q}_{i\lambda}(t, \lambda) = \ddot{q}_i(t). \end{aligned} \tag{45}$$

Pe de altă parte, cum $\bar{r}_{s\lambda}$ aparțin cel puțin clasei C^2, în raport cu toate cele $h+1$ variabile de care depinde, q_i făcînd parte din domeniul de definiție al funcției $\bar{r}_{s\lambda} = \bar{r}_{s\lambda}(q_{i\lambda}, t)$, rezultă:

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda \to 0} \bar{r}_{s\lambda} = \bar{r}_{s\lambda}(q_i, t) = \bar{r}_s \\ &\lim_{\lambda \to 0} \frac{\partial \bar{r}_{s\lambda}}{\partial q_{i\lambda}} = \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{45'}$$

cu toate consecințele pe care aceste egalități le implică.

În ipoteza că funcția $\mathfrak{L}_\lambda (q_{i\lambda}, \dot{q}_{i\lambda}, t)$ și derivatele sale

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_\lambda}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{L}_\lambda}{\partial q_{i\lambda}}, \frac{\partial \mathfrak{L}_\lambda}{\partial \dot{q}_{i\lambda}}, \frac{\partial^2 \mathfrak{L}_\lambda}{\partial q_{i\lambda} \partial t}, \frac{\partial^2 \mathfrak{L}_\lambda}{\partial \dot{q}_{i\lambda} \partial t}, \frac{\partial^2 \mathfrak{L}_\lambda}{\partial q_{i\lambda} \partial \dot{q}_{a\lambda}}, \frac{\partial^2 \mathfrak{L}_\lambda}{\partial \dot{q}_{i\lambda} \partial \dot{q}_{a\lambda}}, \quad (i, \alpha = 1, 2, \ldots, h)$$

sînt uniform continue, și dacă q_i și $\dot{q}_i$ aparțin domeniului de definiție al lui $\mathfrak{L}_\lambda$, se pot scrie egalitățile:

$$\lim_{\lambda \to 0} T_\lambda = T_\lambda (q_i, \dot{q}_i, t) = T$$

$$\lim_{\lambda \to 0} U_\lambda = U_\lambda (q_i, t) = U$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathfrak{L}_\lambda = \mathfrak{L}_\lambda (q_i \dot{q}_i, t) = \mathfrak{L} = T + U + \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{\nu_s} \bar{P}_{sj} \bar{r}_s \delta (t - \tau_{sj})$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\partial \mathfrak{L}_\lambda}{\partial q_{i\lambda}} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\partial \mathfrak{L}_\lambda}{\partial \dot{q}_{i\lambda}} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i, \alpha = 1, 2, \ldots, h) \qquad (46)$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}_\lambda}{\partial t \partial \dot{q}_{i\lambda}} = \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial t \partial \dot{q}_i}$$

$$\lim_{\lambda \leftarrow 0} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}_\lambda}{\partial \dot{q}_{i\lambda} \partial q_{a\lambda}} = \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i \partial q_a}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}_\lambda}{\partial \dot{q}_{i\lambda} \partial \dot{q}_{a\lambda}} = \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_a}$$

De remarcat că dependențele funcționale de mai sus s-au exprimat prescurtat, presupunîndu-se $i = 1, 2, \ldots, h$. De asemenea termenii lui $\mathfrak{L}$ care conțin distribuția lui Dirac au sens pentru că $\bar{r}_s$ sînt continui fiind vectori de poziție.

Cu $\frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i \partial q_a}$ finite, $\dot{q}_i$ finite, $\frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_a}$ finite și diferite de zero, ceea ce corespunde realității fizice, deoarece toate sistemele au viteze finite, și derivate finite și nenule, ale energiilor cinetice în raport cu vitezele, se poate considera limita:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_\lambda}{\partial \dot{q}_{i\lambda}} \right) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}_\lambda}{\partial t \partial \dot{q}_{i\lambda}} + \lim_{\lambda \to 0} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}_\lambda}{\partial \dot{q}_{i\lambda} \partial q_{a\lambda}} \lim_{\lambda \to 0} \dot{q}_{a\lambda} + \lim_{\lambda \to 0} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}_\lambda}{\partial \dot{q}_{i\lambda} \partial \dot{q}_{a\lambda}} \lim_{\lambda \to 0} \ddot{q}_{a\lambda} \qquad (47)$$

care în virtutea relațiilor (45) și (46), ia forma:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_\lambda}{\partial \dot{q}_{i\lambda}} \right) = \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial t \partial \dot{q}_i} + \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i \partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_a} \ddot{q}_a. \qquad (48)$$

În (47) și (48) α este indice mut, sau, sub altă formă,

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}_\lambda}{\partial \dot{q}_{i\lambda}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i}\right). \tag{49}$$

Deci cazul limită ($\lambda \to 0$), care corespunde situației în care sistemul material este percutat (în punctele M_s cu percuțiile $\bar{P}_{sj}$, $s=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, \gamma_s$) face ca ecuațiile de mișcare (43) să devie, conform cu (46) și (49),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i} = 0, \tag{50}$$

în care derivatele trebuiesc înțelese în sensul teoriei distribuțiilor, ceea ce rezultă cu prisosință din prezența distribuției lui Dirac în structura funcției $\mathfrak{L}$.

Deoarece cazul limită ($\lambda \to 0$) transformă forțele continui în percutante de tipul (23), sistemul de ecuații diferențiale (50) va descrie mișcarea în cazul suprapunerii forțelor continui și percutante. El reprezintă, funcția lui Lagrange fiind :

$$\mathfrak{L} = T + U + \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{\gamma_s} \bar{P}_{sj} \bar{r}_s \, \delta(t - \tau_{sj}). \tag{51}$$

Forțele generalizate corespunzătoare forțelor nepercutante sînt :

$$\lim_{\lambda \to 0} Q_{i\lambda} = Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_{s=1}^{n} \bar{F}_s = \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_i}, \tag{52}$$

ceea ce se stabilește imediat, avînd în vedere (38), (45′) și (46) precum și faptul că $\bar{F}_s$ nu depind de parametrul λ.

Forțele generalizate rezultate din aplicarea percuțiilor, sînt în virtutea relațiilor (26), (39) și (45′)

$$\lim_{\lambda \to 0} \Gamma_{i\lambda} = \Gamma_i = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{\gamma_s} \bar{P}_{sj} \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_i} \delta(t - \tau_{sj}), \tag{53}$$

evident adevărată cu $\frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_i}$ continue la momentele $t = \tau_{sj}$ (ca de astfel peste tot) și cu $\bar{P}_{sj}$ constante vectoriale.

În aceste condiții se verifică imediat că ecuațiile (50) mai pot primi și forma :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{s=1}^{n} F_s \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_i} + \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{\gamma_s} P_{sj} \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_i} \delta(t - \tau_{sj}). \tag{54}$$

Trebuie sublimiat că ternenul $\sum_{s=1}^{n} \bar{F}_s \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_i}$ are aici o natură potențială exprimată de egalitatea (52), dar că, pe o cu totul altă cale, s-au stabilit ecuațiile lui Lagrange pentru sistemele materiale percutante, la o formă identică

cu (54), fără însă a fi necesar ca $\sum_{s=1}^{n} \bar{F}_s \frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_l} = Q_l$ să fie conservative sau quasi-conservative.

În concluzie, privind şocul ca pe un caz limită al unei acţiuni continui, s-a putut extinde domeniul de utilizare al principiului variaţional al lui Hamilton şi pentru cazul sistemelor percutante.

Sintetizînd rezultatele de mai sus se poate deduce că dîndu-se integrala în sensul teoriei distribuţiilor

$$I_D = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}(q_l, \dot{q}_l, t)\, dt \tag{55}$$

în care $\mathfrak{L}$ avînd structura (51), cu discontinuităţile pe care aceasta le implică (energia cinetică T este, în general, discontinuă la $t=\tau_{sj}$) şi în care intră şi distribuţia lui Dirac, mişcarea reală va fi astfel încît (55) să prezinte un extremum, ce are loc atunci cînd

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_l} = 0\,; \quad i = 1, 2, \ldots, h \tag{56}$$

obţinîndu-se astfel sistemul de ecuaţii diferenţiale pentru mişcările percutate, în care derivatele sînt în sensul teoriei distribuţiilor.

Adică, cu alte cuvinte, regulile impuse de calculul variaţiilor se extind, în acest caz, fără a mai fi necesară condiţia (3) precizîndu-se însă că atît integralele, cît şi derivatele implicate, trebuie considerate în sensul funcţiilor generalizate.

Ultima afirmaţie face posibilă aplicarea imediată a principiilor variaţionale integrale (în sensul teoriei distribuţiilor) şi atunci cînd sistemele materiale studiate suferă percuţii la anumite momente date.

În cele ce urmează se va prezenta un exemplu de calcul:

Fie un punct material M, de masă m, în cădere liberă, fără viteză iniţială, de la înălţimea h. La cota z_0 punctul primeşte o percuţie $P = \alpha\bar{i} + \beta\bar{j} + \gamma\bar{k}$, cu notaţiile evidente. Se cere să se dstabilească legea de mişcare a particulei M, neglijîndu-se frecările.

Sistemul cartesian se alege cu axa Oz ascendentă şi confundată cu verticala punctului $A(0, 0, h)$ din care se face lansarea.

Se stabileşte imediat că momentul la care are loc percuţia este:

$$\tau = \sqrt{\frac{2(h - z_0)}{g}} \tag{57}$$

iar funcţia $\mathfrak{L}$ este dată de egalitatea:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz + (\alpha x + \beta y + \gamma z)\, \delta(t - \tau) \tag{58}$$

în care x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ sînt coordonatele şi respectiv vitezele generalizate, confundate cu cele cartesiene.

Sistemul (56) devine, pentru acest caz particular:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \alpha\delta(t-\tau) \\ m\ddot{y} &= \beta\delta(t-\tau) \\ m\ddot{z} &= \gamma\delta(t-\tau) - mg. \end{aligned} \tag{59}$$

Integrîndu-l, în sensul teoriei sidtribuțiilor, și ținînd seama de condițiile inițiale se obține legea de mișcare căutată:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha}{m}(t-\tau)\,H(t-\tau) \\ y &= \frac{\beta}{m}(t-\tau)\,H(t-\tau) \\ z &= \frac{\gamma}{m}(t-\tau)\,H(t-\tau) - \frac{gt^2}{2} + h. \end{aligned} \tag{60}$$

Într-adevăr, dacă în (60) $t<\tau$ (adică înainte de șoc) legea este:

$$x=0\,;\quad y=0\,;\quad z=h-\frac{gt^2}{2}\,, \tag{60'}$$

adică cea din cazul căderii libere pe verticală.

Dacă însă $t>\tau$, schimbînd originea timpului prin notația $t-\tau=t_1$, după calcule elementare se obține:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha}{m}t_1\,; \qquad y=\frac{\beta}{m}t_1\,; \\ z &= -\frac{g}{2}t_1^2 + \left[\frac{\gamma}{m} - \sqrt{2(h-z_0)g}\right]t_1 + z_0 \end{aligned} \tag{60''}$$

în care se recunoaște curba balistică a unui punct greu în vid, lansat din poziția $B(0, 0, z_0)$ cu viteza inițială:

$$\bar{v}_0 = \frac{\alpha}{m}\bar{i} + \frac{\beta}{m}\bar{j} + \left[\frac{\gamma}{m} - \sqrt{2(h-z_0)g}\right]\bar{k}. \tag{61}$$

Deci tocmai ceea ce era de așteptat.

În încheiere se poate preciza că generalizarea principiului lui Hamilton pentru sistemele percutate, antrenează și extinderea principiului variațional al lui Maupertuis, într-un mod cu totul similar.

De asemenea, se întrevede posibilitatea de generalizare a calculului variațional, pentru funcționale care nu mai este necesar să respecte restricțiile clasice, prin considerarea operațiunilor de integrare și derivare în sensul teoriei distribuțiilor.

BIBLOGRAFIE

1) Bouix. M. Les fornctions generalisee ou distributions — Masson Paris, 1964
2) Kecs W. La eneralisation de la notion de variation. Revue Roumain de Mathenmatique pure et applique, nr. 3, 1968
3) Plăcinţeanu I. *Mecanica vectorială şi analitică.* Editura Tehnică Bucureşti 1959.
4) Tocaci E. Asupra ecuaţiilor mecanicii analitice pentru cazul sistemelor materiale percutate, St. cerc. mat. tomul 18 nr. 8, 1966
6) Vilcovici V., Bălan St., Voinea R. *Mecanica teoretică,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1963.

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ ПРЕРЫВИСТЫХ ДВИЖЕНИЙ

(РЕЗЮМЕ)

Введение теории распределений даёт возможность расширения вариационных принципов для случаев прерывности. Достигается форма тождественная с классической, при различии, что операции интегрирования и деривации имеют значение обобщённых функций.

LE PRINCIPE VARIATIONNEL DE HAMILTON POUR LES MOUVEMENTS DISCONTINUS.

RESUME

L'introduction de la théorie des distributions offre la possibilité de l'extension des principes variationels pour les situation de discontinuiteé. à une forme identique à la forme classique, avec la différence que les opérations d'intégrations et de dérivation ont sens des fonctions généralisées.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848 KÖNYVTÁR
174

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic Timişoara. Seria Matematică, Fizică, Mecanică teoretică şi aplicată	Tom 16(30)	Fasc. 2	pag. 137—252	Timişoara	Iulie-Decembrie 1971

I.P.B.T. 1515 478 Lei 15.—